Travaux dirigés : Approximation de π par la méthode d'Archimède

I. Introduction

Archimède de Syracuse (grec 287 av. J.-C.- 212 av. J.-C.), est un grand scientifique grec de Sicile (Grande-Grèce) de l'Antiquité, physicien, mathématicien et ingénieur. Parmi ses domaines d'étude en physique, on peut citer l'hydrostatique, la mécanique statique et l'explication du principe du levier. Il est crédité de la conception de plusieurs outils innovants, comme la vis d'Archimède. En mathématiques, il a utilisé la méthode d'exhaustion (double raisonnement par l'absurde) pour calculer l'aire sous un arc de parabole et a donné un encadrement de Pi d'une remarquable précision. Il a également introduit la spirale qui porte son nom, des formules pour les volumes des surfaces de révolution et un système ingénieux pour l'expression de très grands nombres.

Pi, appelé parfois constante d'Archimède, est un nombre représenté par la lettre grecque minuscule du même nom : π. C'est le rapport constant de la circonférence d'un cercle à son diamètre dans un plan euclidien. On peut également le définir comme le rapport de l'aire d'un disque au carré de son rayon.

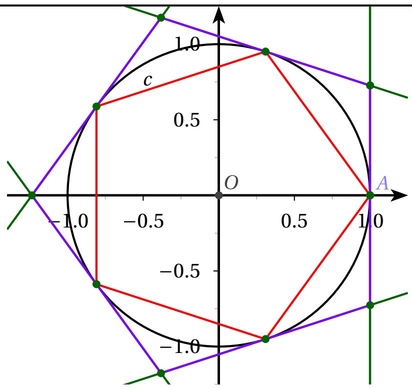
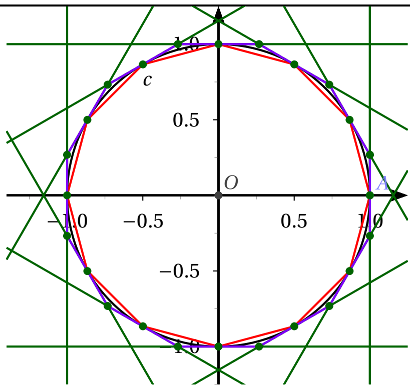
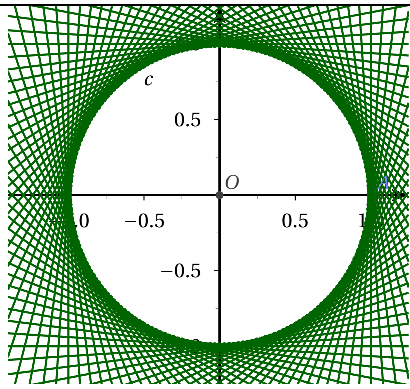
Sa valeur approchée par défaut est 3,141 592 653 589 793. Au Palais de la découverte à Paris, une salle est consacrée au nombre π.
visite libre de la salle Pi du Palais de la découverte - Paris

II. Travail à faire

II. A. Sur GeoGebra

1. Construire le point O origine du repère et le point A de coordonnées (1 ; 0).
2. Construire le cercle trigonométrie et en donner la valeur exacte de son périmètre.
   Vérifier que le nom du cercle est c.
3. Construire un curseur n variant de 3 à 100 avec un pas de 1
4. Construire le polygone régulier de n côtés, inscrit dans le cercle, de centre O dont un des sommets est A :
   - saisir la commande suivante : séquence((cos(2*i*pi/n),sin(2*i*pi/n)),i,0,n,1)
     Vérifier que la séquence est nommée liste1
   - saisir la commande suivante : LigneBrisée(liste1)
   - mettre en rouge ce polygone inscrit.
5. Construire le polygone régulier de n côtés, exinscrit du le cercle, de centre O à partir des points de la liste 1 :
   - saisir la commande suivante : Séquence[Tangente[(cos(2*i*pi / n), sin(2*i* pi / n)), c], i, 0, n]
     Vérifier que la séquence est nommée liste2
   - saisir la commande suivante :
     Séquence[Intersection[Tangente[(cos(2*i* pi / n), sin(2*i pi / n)), c],
     Tangente[(cos(2 *(i + 1)* pi / n), sin(2* (i + 1)* pi / n)), c]], i, 0, n]
     Vérifier que la séquence est nommée liste3
   - saisir la commande suivante : LigneBrisée(liste3)
   - mettre en bleu ce polygone exinscrit.

6. Par lecture des longueurs des lignes brisées (polygones) dans la fenêtre d'algèbre, donner un encadrement de 2π pour $n = 5$, $n = 12$ et $n = 100$:

$n = 5$	$n = 12$	$n = 100$
		
Encadrement de 2π	Encadrement de 2π	Encadrement de 2π

II. B. Encadrement de π

Pour un polygone quelconque on considère un des triangles isocèles AOB et on admet que la médiatrice du segment $[AB]$ est un axe de symétrie du quadrilatère $AOBF$.

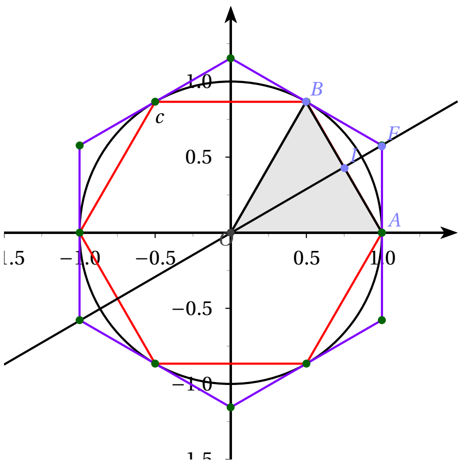


figure pour $n = 6$

1. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}\right)$ en fonction de n (n est le nombre de côté du polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique) ; puis une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OE}\right)$ en fonction de n

2. En déduire la longueur IA en fonction de n ; puis la longueur AE en fonction de n.

3. Archimède démontre par exhaustion l'encadrement suivant (admis pour l'activité) :

$$\mathscr{P}_I < 2\pi < \mathscr{P}_E$$

où $\mathscr{P}_I$ est le périmètre du polygone inscrit dans le cercle et $\mathscr{P}_E$ est le périmètre du polygone exinscrit du cercle.

Donner un encadrement de 2π puis de π.

II. C. Approximation de π

Sur Python, on a défini deux fonctions qui déterminent respectivement le périmètre du polygone inscrit et le périmètre du polygone exinscrit.

```python
from math import*

def PerimetrePolyInscrit(n):
    return n*2*sin(pi/n)

def PerimetrePolyExinscrit(n):
    return n*2*tan(pi/n)
```

approximation_pi.py

On peut tester ces fonctions avec les commandes :

- PerimetrePolyInscrit(100)
- PerimetrePolyExinscrit(100)

et retrouver les résultats obtenus sur GeoGebra.

Pour avoir un approximation de π à 10^{-p}, on complète le programme avec l'algorithme traduit en Python :

$n \leftarrow 3$

Tant que $\dfrac{\mathscr{P}_E - \mathscr{P}_I}{2} > 10^{-p}$ faire :

  $n \leftarrow n+1$

Fin tant que

```python
def ApproximationPi(p):
    n=3
    while PerimetrePolyExinscrit(n)/2-
    PerimetrePolyInscrit(n)/2>10**(-p):
        n=n+1
    return n,PerimetrePolyInscrit(n)/2,
    PerimetrePolyExinscrit(n)/2
```

approximation_pi.py

Donner une approximation de π à 10^{-10} :

Une approximation de π à 10^{-15} donne :
$n = 107\,706\,692$, $\mathscr{P}_I = 3{,}141\,592\,653\,589\,792\,7$,$\mathscr{P}_E = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,6$