Lycée Paul Eluard et collège Louise Michel de Saint-Junien

Présentation de l'équipe du laboratoire

Le laboratoire, à l'origine, était composé de cinq enseignants du lycée et de trois du collège. Actuellement, seuls quatre enseignants du lycée en sont des membres actifs.

Organisation du travail

Nous travaillons au sein du laboratoire depuis réellement un peu plus d'un an. Nous nous sommes réunis trois fois et correspondons par mail. Ce travail a donné lieu également à une mise en situation dans une classe du collège et une classe du lycée.

Le thème choisi

Le thème choisi est celui de l'histoire des mathématiques pour répondre aux nouveaux programmes du lycée notamment. Le but est d'essayer une nouvelle approche pédagogique afin d'intéresser davantage les élèves.

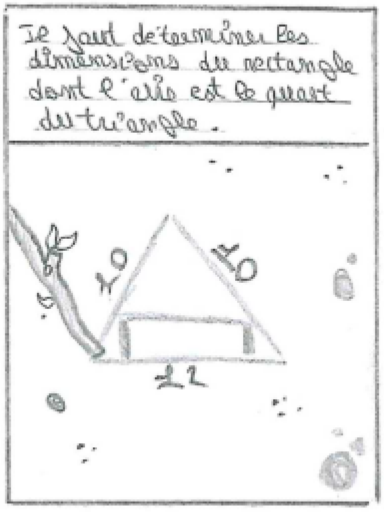
Lien avec les programmes scolaires

L'activité proposée permet de développer des compétences en géométrie et en algèbre. Elle permet de réinvestir les théorèmes de Thalès et de Pythagore, mais aussi de s'entrainer au calcul littéral et à la résolution d'équations.

La suite du travail

Actuellement, nous réfléchissons à la suite et pensons sans doute recentrer notre travail davantage sur les programmes du lycée.

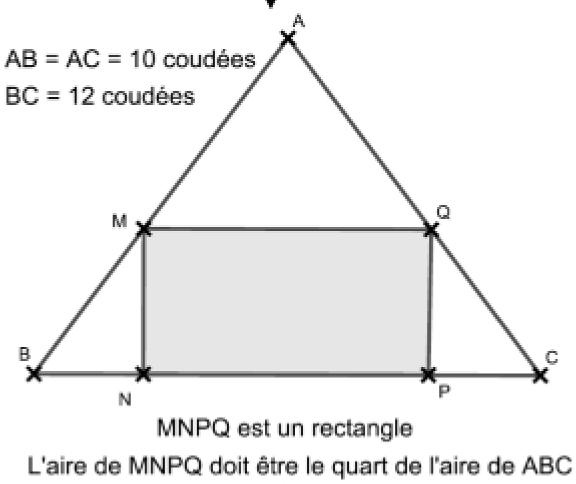
Choix de l'activité



Création d'une bande dessinée sur l'histoire des mathématiques avec une classe de seconde.

A partir d'une des planches de cette bande dessinée, des élèves d'une classe de troisième et d'une classe de seconde doivent mettre en évidence le problème posé.

(ci-contre : vignette extraite de la planche)



Modélisation du problème

Travail différencié (3 énoncés avec différents niveaux de difficulté) proposé aux élèves des deux classes.

$$x^2 + 8 = 8x$$

Obtention d'une équation de type 5 selon le modèle proposé par Al-Khwarizmi.

La résolution de ce type d'équation n'est pas connue en troisième, ni en seconde.

La deuxième partie du travail consiste à proposer une activité permettant la mise en oeuvre de l'algorithme de résolution proposée par Al-Khwarizmi.

Nous avons choisi de présenter cette activité portant sur la résolution de cette équation suivant le modèle historique (voir pages 3 et 4).

Les prérequis pour cette activité sont la connaissance des théorèmes de Thalès et Pythagore ainsi qu'une certaine aisance dans le calcul littéral. Les principales difficultés rencontrées sont liées justement au calcul littéral, mais aussi à la compréhension d'un texte en français.

Activité

Equations du second degré

Nous allons étudier des extraits du *Livre sur le calcul par la restauration et la comparaison* qui proposent la résolution des équations du second degré.
Une équation du second degré est une équation du type :

$$x^2 + px + q = 0$$

où p et q sont des nombres rationnels (sous forme de fraction) positifs ou négatifs.
A l'époque d'Al-Khwārizmī, il n'est pas encore question de nombres négatifs ni du nombre zéro, c'est pourquoi il classe ces équations du second degré en plusieurs catégories ou types.

Types simples :

- Type 1 : $x^2 = px$
- Type 2 : $x^2 = q$
- Type 3 : $q = px$

Types composés :

- Type 4 : $x^2 + px = q$
- Type 5 : $x^2 + q = px$
- Type 6 : $px + q = x^2$

Cette fois-ci, p et q sont des nombres rationnels non nuls (différents de zéro) et POSITIFS.
Nous allons nous intéresser plus particulièrement aux équations de type 4, 5 et 6 que nous ne savons pas résoudre au collège.

Vocabulaire

Voici un extrait du Mukhtasasar fī hisāb al-jabr wa-l-muqābala [Livre sur le calcul par la restauration et la comparaison] d'al-Khwārizmī (IXe siècle) qui propose la résolution des équations composées du second degré (A partir de la traduction française réalisée par Roshdi Rashed, 2007, p. 96 – 106) :

> *J'ai trouvé les nombres dont on a besoin dans le calcul d'al-jabr wa-l-muqābala, selon trois modes qui sont : les racines, les carrés, et le nombre simple, qui n'est rapporté ni à une racine, ni à un carré. La racine, parmi ces modes, est toute chose multipliée par elle-même, à partir de l'unité, les nombres qui sont au-dessus d'elle, et les fractions qui sont au-dessous d'elle. Le carré est ce qu'on obtient lorsqu'on multiplie la racine par elle-même. Le nombre simple est un nombre qu'on exprime sans qu'il soit rapporté ni à une racine, ni à un carré.*

Voici la discussion des trois modes du nombre dans le Liber restauracionis (Livre de la restauration), adaptation latine du 13e siècle de l'algèbre d'al-Khwārizmī. (d'après M. Moyon 2017) :

> *Quant au nombre qui est nécessaire pour notre calcul, il est divisé en trois [modes] : la racine du nombre, le carré ou le bien de la racine et le nombre simple associé ni avec le carré ni avec la racine. Quant à la racine, c'est le nombre qui, multiplié par lui-même, produit l'autre. Quant au bien ou le carré de la racine, c'est le nombre qui est produit à partir de ladite racine multipliée par elle-même. Le nombre simple est ce qui n'est produit par le moyen d'aucun bien ou d' aucune racine.*

En clair, à quoi correspondent, une racine, une chose, un carré, un nombre simple ?

Une racine se dit « shay » en arabe et sera représentée par un shin (première lettre du mot) qui donnera « x »(dû à la transcription phonétique de « sh » en langue romane de l'époque, encore aujourd'hui en portugais).

Donc, aujourd'hui :

- une **racine** (ou une chose) se traduit par l'inconnue x
- un **carré** (ou un bien) par x^2
- un **nombre simple** correspond au terme constant. Il apparaît souvent sous forme de dirham ou de drachme (monnaie) dans les textes d'al-Khwārizmī ou ses traductions latines.

Equations de type 5 : Les carrés et les nombres égaux à des racines ($x^2 + q = px$)

Problème proposant une résolution d'équation de type 5

> Les carrés et les nombres égaux à des racines, c'est par exemple lorsque tu dis : un carré et vingt et un dirhams sont égaux à dix racines, c'est-à-dire que, si tu ajoutes à un carré quelconque vingt et un dirhams, ce que tu obtiens sera égal à dix racines de ce carré.
>
> Procédé : partage en deux moitiés le nombre des racines ; on aura cinq ; multiplie-le par lui-même, on aura vingt-cinq, dont tu retranches vingt et un, ce qu'on a dit être avec le carré ; il reste quatre ; prends sa racine, qui est deux ; retranche-la de la moitié du nombre des racines, qui est cinq. Il reste trois, qui est la racine du carré que tu veux. Et le carré est neuf. Si tu veux, ajoute la racine à la moitié du nombre des racines ; on aura sept, qui est la racine du carré cherché, et le carré est quarante-neuf. Si tu rencontres un problème qui te mène à cette sorte, vérifie son exactitude, soit en ajoutant, sinon en retranchant nécessairement. Ce procédé se fait à la fois en ajoutant et en retranchant, ce qui ne se fait dans aucune des trois sortes, dans lesquelles on a besoin de partager en deux moitiés le nombre des racines. Sache que, si tu partages le nombre des racines dans cette sorte en deux moitiés, et que tu multiplies [une moitié] par elle-même de sorte que le produit soit moins que les dirhams qui sont avec les carrés, le problème devient alors impossible ; et si le résultat est égal aux dirhams eux-mêmes, la racine du carré est alors égale à la moitié du nombre des racines exactement, sans excédent ni diminution.

1. Si on note x^2 « les carrés » et x « les racines » , écrire l'expression littérale qui correspond à l'exemple proposé :

2. Ecrire les calculs correspondants aux étapes données dans le procédé pour résoudre l'équation obtenue :
   Vérifier la (les) solution(s) trouvée(s).
   On a ainsi obtenu un algorithme de résolution pour cette équation.

3. **Vers la généralisation ...**
   Et s'il avait dit « un carré plus huit dirhams sont égaux à huit racines » ?
   (a) Ecrire l'expression littérale qui correspond à cette situation :

   (b) Quelles seraient les étapes données dans le procédé précédent pour résoudre l'équation obtenue ? Vérifier la (les) solution(s) trouvée(s).

4. On veut écrire un algorithme permettant de résoudre les équations du type 5 ($x^2 + q = px$) où p désigne le nombre de racines et q le nombre de dirhams.

   Reprendre les étapes du procédé précédent en remplaçant le nombre de racines (10) par p et le nombre de dirhams (21) par q.