Histoire des logarithmes : activités pour la classe

Table des Matières

Histoire des logarithmes : activités pour la classe

Toutes les activités présentées peuvent être approfondies à l'aide du diaporama sur « une histoire des logarithmes ».

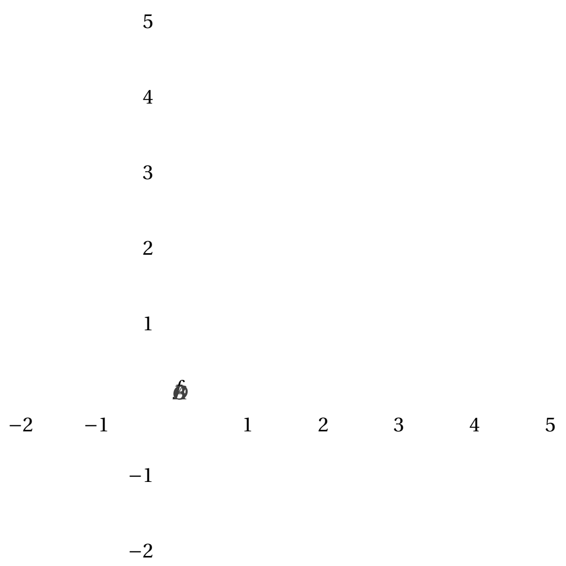
I. Introduction de la fonction logarithme

I. A. Fonction réciproque de la fonction exponentielle

Le programme de spécialité donne la définition de la fonction logarithme népérien, notée ln, construite comme réciproque de la fonction exponentielle.
Soit la fonction exponentielle :

$$exp : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]0\,;\,+\infty[\\ x & \mapsto & e^x \end{array}$$

1. Donner la solution $\alpha(1)$ de l'équation $e^x = 1$.
2. Justifier que l'équation $e^x = 2$ admet une unique solution $\alpha(2)$, donner une valeur approchée à 10^{-6} de cette solution.
3. Que pouvez-vous dire des solutions de l'équation $e^x = k$ suivant les valeurs réelles de k ?
4. Sur le graphique suivant, construire la solution de l'équation $e^x = k$ pour chaque valeur de k repérées.



5. Y a-t-il un axe de symétrie qui permet cette construction, si oui, le tracer.

   Isacc Newton (anglais, britanique 1643-1727) est un physicien, mathématicien, philosophe, alchimiste, astronome et théologien. Il trouvera la fonction réciproque de la fonction logarithme sans savoir que c'était la fonction exponentielle, Léonhard Euler (suisse 1707-1783) explicitera la fonction exponentielle et le nombre e.

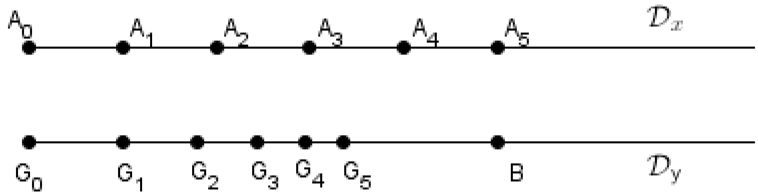
I. B. Napier, Logarithme discret

John Napier ou Neper (Écossais 1550-1617) mathématicien, théologien, physicien, astronome, a défini le logarithme (en grec nombre de raison) :
Logarithmi sunt numeri qui proportionalibus adjuncti aequales servant diferentias
Les logarithmes sont les nombres qui a des nombres proportionnels et ont des différences égales :

- logos : raison, sous-entendu raison de progression arithmétique
- arithmos : nombre, quantité.

- **Demi-droite** D_x : progression arithmétique telle que $L = A_0A_1 = A_1A_2 = ... = A_kA_{k+1}$

- **Demi-droite** D_y : progression géométrique telle que $G_0B = 10^7$, et pour $q \in]0; 10^7[$, $q = \dfrac{G_1B}{G_0B} = \dfrac{G_2B}{G_1B} = ... = \dfrac{G_{k+1}B}{G_kB}$.



1. Démontrer que pour tout entier naturel k, on a
$\boxed{A_0A_k = kA_0A_1 = kL \text{ et } G_kB = 10^7q^k}$

2. On définit la fonction LOG par $LOG(G_kB) = A_0A_k$.

   (a) Montrer que $LOG(10^7) = 0$

   (b) Montrer que $LOG(G_1B) = L$

   (c) Montrer que $LOG(q^k) = kLOG(q)$

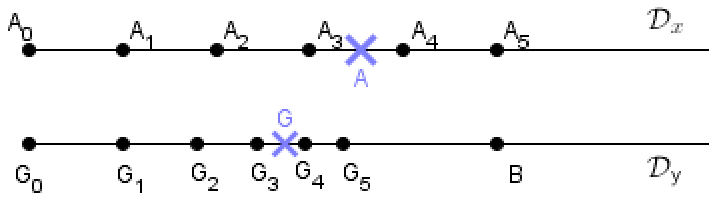
I. C. Napier : logarithme continu

Cette activité nécessite la connaissance de la fonction ln, elle peut être une suite de l'activité précédente.
Napier utilise la **cinématique** pour expliquer **le phénomène continue du logarithme**, un mobile se déplace sur chacune des demi-droites $\mathscr{D}_x$ et $\mathscr{D}_y$ de la manière suivante :

- Pour la progression arithmétique : le mouvement est uniforme, de A_0 vers A_1, la vitesse v est constante.

- Pour la progression géométrique :

  – $G_0B = 10^7$
  – À l'instant 0, en G_0 la vitesse est v.
  – À chaque instant, la vitesse du mobile est proportionnelle à la distance qui le sépare de B.



On note $x(t)$ la distance A_0A.
On note $y(t)$ la distance G_0G. On admet que la fonction y vérifie l'équation différentielle (E) $y'(t) + Cy(t) = C \times 10^7$ (C est une constante réelle).

1. Montrer que la fonction qui a t associe 10^7 est solution particulière de (E)

2. Résoudre l'équation différentielle (E') $y' + Cy = 0$.

3. En déduire $y(t) = 10^7 - 10^7e^{-Ct}$

4. Sachant que $x'(0) = y'(0)$, montrer que $x(t) = C \times 10^7 t$.

5. En déduire $y(x) = 10^7 - 10^7e^{-\frac{x}{10^7}}$.

6. Neper définit sa fonction logarithme par $LOG(GB) = A_0A$. En posant $z = GB$, justifier $LOG(z) = 10^7 \ln\left(\dfrac{10^7}{z}\right)$.

I. D. Briggs

Henry Briggs (anglais 1556-1630), mathématicien, remarque que lorsqu'à une progression géométrique (g_n), $g_n = g_0 q^n$ on associe une progression arithmétique (a_n) $a_n = a_0 + nr$ ($g_0 > 0$, $q > 0$, $a_0 > 0$ et n entier naturel) alors à la moyenne géométrique on associe la moyenne arithmétique.
Il définit la fonction $\log_{10}$ telle que :

$$log_{10}(1) = 0 \text{ et } \log_{10}(10) = 1$$

et pour tout réel strictement positif g et g' tels que $\log_{10}(g) = a$ et $\log_{10}(g') = a'$ on a $\mathscr{P}_1$:

$$\log_{10}(\sqrt{gg'}) = \frac{a+a'}{2}$$

1. Justifier que $\log_{10}(\sqrt{10}) = 0,5$.
2. Compléter le tableau suivant :

Nombre	$\log_{10}$
1	0
10	1
$\sqrt{10}$	
$\sqrt{\sqrt{10}}$	
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$	
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}$	
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}}$	

3. Vérifier que la fonction ln vérifie la propriété $\mathscr{P}_1$. Déterminer $\ln\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{e}}}}}\right)$.

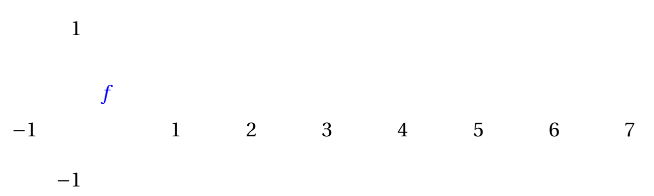
   Remarque : si la fonction ln *n'est pas connue, on peut la faire découvrir en définissant la fonction telle que* $\ln(1) = 0$ *et* $\ln(e) = 1$ *avec la propriété* $\mathscr{P}_1$ *et en complétant le tableau associé.*

4. Prolongement de l'activité avec les algorithmes de Briggs (voir document algorithmes)

I. E. Quadrature de l'hyperbole

On peut commencer par l'algorithme de Brounker (voir document algorithme) ou présenter les travaux de Saint Vincent. Ainsi on définit l'aire sous l'hyperbole sur l'intervalle $[1\ ;\ x]$ pour x positif comme $\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ et l'aire sous l'hyperbole sur l'intervalle $[x\ ;\ 1]$ pour $x \in]0\ ;\ 1]$ comme $-\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.
La fonction ln est celle qui à x réel strictement positif associe $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

Grégoire Saint-Vincent (belge 1584-1667), jésuite, mathématicien, géomètre, souhaite faire la quadrature de l'hyperbole. Il construit n trapèzes sur les intervalles $[q^i\ ;\ q^{i+1}]$ pour i entier naturel variant de 0 à $n-1$ dont 2 sommets sont des points de l'hyperbole (on choisit $q > 1$) :



1. Calculer l'aire de la somme aires des trapèzes pour $q = 2$ et $n = 3$.
   À partir de la calculatrice calculer $\int_1^8 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

2. Montrer que l'aire d'un trapèze constante, égale à $\dfrac{q^2-q}{2q}$. En déduire que la somme des aires des trapèzes est une suite arithmétique, dont vous préciserez le premier terme et la raison. Exprimer cette somme en fonction de n. On admet que cette somme converge vers l'aire de l'hyperbole sur l'intervalle $[1\,;\,q^n]$ pour n fixé.

3. On définit la fonction ln pour tout réel x par $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et d'après ce qui précède on admet que $\displaystyle\int_{q^i}^{q^{i+1}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ est constante pour tout entier naturel i.

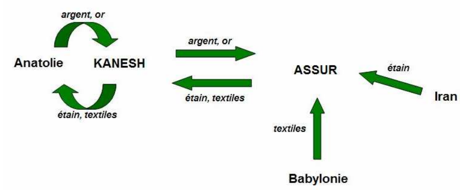
   (a) Calculer $\ln(1)$.

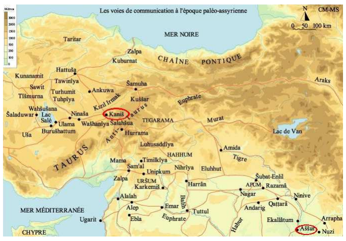
   (b) Montrer que $\ln(q^{i+1}) - \ln(q^i) = \ln(q)$.

   (c) En déduire $\ln(q^n) = n\ln(q)$.

I. F. Intérêt composé

À l'époque **des babyloniens** (II^e millénaire av.JC au VI ^{e} siècle av. J.-C.), on trouve des traces d'**un commerce riche et abondant**, ici un schéma pris sur Wikipédia donnant les circuits du commerce entre Assur et Kanesh :





Tablettes des archives des marchands assyriens exhumées à Kültepe

Lettre d'un marchand à un responsable de convoi.

Compte des recettes et dépenses d'un convoi.

Reçu pour un prêt en argent.

Compte-rendu de procès.

Dès cette époque on souhaite répondre à la question :
Combien de temps faut-il pour doubler un capital C_0 rémunéré au taux $t = 20\% = 0,2$?

1. Vérifier que le problème revient à résoudre l'équation $1,2^n = 2$.

2. Pour n entier naturel quel est le sens de variation de la suite qui à n associe $1,2^n$. Donner deux entiers consécutifs qui encadre la solution réelle de l'équation $1,2^x = 2$.

3. Au nombre $1,2^3$ on associe le nombre 3 ; au nombre $1,2^4$ on associe 4. Le mathématicien Briggs remarque qu'au nombre $\sqrt{1,2^3 \times 1,2^4}$ on associe le nombre $3,5$. Calculer le nombre $1,2^{3,5}$ et comparer-le à 2. Poursuivez jusqu'à obtenir une valeur approchée de la solution $1,2^x = 2$ à 10^{-4}.

4. Comparer avec la valeur donnée par les tables de calculs des babyloniens : $x \simeq 3 + \dfrac{47}{60} + \dfrac{13}{60^2} + \dfrac{20}{60^3}$.

II. Propriétés des fonctions logarithmes : tables

II. A. Napier

On admet que le logarithme de Neper est la fonction LOG définie pour tout réel x strictement positif par $LOG(x) = 10^7 \ln\left(\dfrac{10^7}{x}\right)$.

On pose $A = 9\,995\,000$ et $B = 9\,900\,000$

1. Calculer $LOG(9\,995\,000)$, donner la valeur affichée par la calculatrice.
2. Calculer $LOG(9\,900\,000)$, donner la valeur affichée par la calculatrice.
3. À l'aide du tableur, construire la table suivante :

N	LOG	N	LOG	N	LOG		N	LOG
10^7	0	B	b	B^2	$2b$	...	B^{68}	$68b$
A	a	AB	$a+b$	AB^2	$a2+b$	...	AB^{68}	$a+68b$
A^2	$2a$	A^2B	$2a+b$	A^2B^2	$2a+2b$	...	A^2B^{68}	$2a+68b$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
A^{20}	$20a$	$A^{20}B$	$20a+b$	$A^{20}B^2$	$20a+2b$	...	$A^{20}B^{68}$	$20a+68b$

Remarque : le logarithme de Neper n'est pas tout à fait le même que celui utilisé précédemment, pour calculer les logarithmes de A et B il procède suivant les étapes suivantes :

$$\boxed{LOG(999\,999) = LOG(10^7 - 10) \simeq 1{,}000\,000\,05}$$

Ensuite :

nombre	logarithme
$(999\,999)^{100} > 9\,999\,900$	$100 \times 1{,}000\,000\,05$
$(1-10^{-7})^{101} < 9\,999\,900$	$101 \times 1{,}000\,000\,05 \times 10^{-7}$

Par interpolation il déduit $LOG(9\,999\,900) \simeq 100{,}000\,5$

nombre	logarithme
$(9\,999\,900)^{50} > 9\,999\,500$	$50 \times 1{,}000\,5$
$(09\,999\,900)^{51} < 9\,999\,500$	$51 \times 1{,}000\,5$

Par interpolation il déduit $LOG(A) = LOG(9\,995\,000) \simeq 5\,001{,}25$

nombre	logarithme
$(9\,995\,000)^{20} > 9\,900\,000$	$20 \times 5\,001{,}25$
$(9\,995\,000)^{21} < 9\,900\,000$	$21 \times 5\,001{,}25$

Par interpolation il déduit $LOG(B) = LOG(9\,900\,000) \simeq 100\,503{,}4$

II. B. Lecture de tables de logarithme et construction de base

On donne le tableau suivant qui est incomplet. Il reprend un procédé de construction mis en évidence par Neper et Briggs :

La multiplication de deux nombres de la colonne de gauche correspond à l'addition de deux nombres de la colonne de droite.

x	$\ln(x)$
0,1	
0,5	
1	
2	0,6931
3	1,0986
4	
6	
5	
10	
25	3,2189
64	
100	

1. Compléter les valeurs manquantes du tableau.

2. Ce travail peut être complété avec l'algorithme de CORDIC avec une lecture d'une table de logarithme décimale (logarithme de Briggs) :

Table des logarithmes décimaux entre 0,01 et 1

N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)
0,01	–2	0,21	–0,677 78	0,41	–0,387 22	0,61	–0,214 67	0,81	–0,091 51
0,02	–1,698 97	0,22	–0,657 58	0,42	–0,376 75	0,62	–0,207 61	0,82	–0,086 19
0,03	–1,522 88	0,23	–0,638 27	0,43	–0,366 53	0,63	–0,200 66	0,83	–0,080 92
0,04	–1,397 94	0,24	–0,619 79	0,44	–0,356 55	0,64	–0,193 82	0,84	–0,075 72
0,05	–1,301 03	0,25	–0,602 06	0,45	–0,346 79	0,65	–0,187 09	0,85	–0,070 58
0,06	–1,221 85	0,26	–0,585 03	0,46	–0,337 24	0,66	–0,180 46	0,86	–0,065 5
0,07	–1,154 9	0,27	–0,568 64	0,47	–0,327 9	0,67	–0,173 93	0,87	–0,060 48
0,08	–1,096 91	0,28	–0,552 84	0,48	–0,318 76	0,68	–0,167 49	0,88	–0,055 52
0,09	–1,045 76	0,29	–0,537 6	0,49	–0,309 8	0,69	–0,161 15	0,89	–0,050 61
0,1	–1	**0,3**	–0,522 88	**0,5**	–0,301 03	**0,7**	–0,154 9	**0,9**	–0,045 76
0,11	–0,958 61	0,31	–0,508 64	0,51	–0,292 43	0,71	–0,148 74	0,91	–0,040 96
0,12	–0,920 82	0,32	–0,494 85	0,52	–0,284	0,72	–0,142 67	0,92	–0,036 21
0,13	–0,886 06	0,33	–0,481 49	0,53	–0,275 72	0,73	–0,136 68	0,93	–0,031 52
0,14	–0,853 87	0,34	–0,468 52	0,54	–0,267 61	0,74	–0,130 77	0,94	–0,026 87
0,15	–0,823 91	0,35	–0,455 93	0,55	–0,259 64	0,75	–0,124 94	0,95	–0,022 28
0,16	–0,795 88	0,36	–0,443 7	0,56	–0,251 81	0,76	–0,119 19	0,96	–0,017 73
0,17	–0,769 55	0,37	–0,431 8	0,57	–0,244 13	0,77	–0,113 51	0,97	–0,013 23
0,18	–0,744 73	0,38	–0,420 22	0,58	–0,236 57	0,78	–0,107 91	0,98	–0,008 77
0,19	–0,721 25	0,39	–0,408 94	0,59	–0,229 15	0,79	–0,102 37	0,99	–0,004 36
0,2	–0,698 97	**0,4**	–0,397 94	**0,6**	–0,221 85	**0,8**	–0,096 91	**1**	0

Table des logarithmes décimaux entre 1 et 100

N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)	N	ln(N)
1	0	21	1,322 22	41	1,612 78	61	1,785 33	81	1,908 49
2	0,301 03	22	1,342 42	42	1,623 25	62	1,792 39	82	1,913 81
3	0,477 12	23	1,361 73	43	1,633 47	63	1,799 34	83	1,919 08
4	0,602 06	24	1,380 21	44	1,643 45	64	1,806 18	84	1,924 28
5	0,698 97	25	1,397 94	45	1,653 21	65	1,812 91	85	1,929 42
6	0,778 15	26	1,414 97	46	1,662 76	66	1,819 54	86	1,934 5
7	0,845 1	27	1,431 36	47	1,672 1	67	1,826 07	87	1,939 52
8	0,903 09	28	1,447 16	48	1,681 24	68	1,832 51	88	1,944 48
9	0,954 24	29	1,462 4	49	1,690 2	69	1,838 85	89	1,949 39
10	1	**30**	1,477 12	**50**	1,698 97	**70**	1,845 1	**90**	1,954 24
11	1,041 39	31	1,491 36	51	1,707 57	71	1,851 26	91	1,959 04
12	1,079 18	32	1,505 15	52	1,716	72	1,857 33	92	1,963 79
13	1,113 94	33	1,518 51	53	1,724 28	73	1,863 32	93	1,968 48
14	1,146 13	34	1,531 48	54	1,732 39	74	1,869 23	94	1,973 13
15	1,176 09	35	1,544 07	55	1,740 36	75	1,875 06	95	1,977 72
16	1,204 12	36	1,556 3	56	1,748 19	76	1,880 81	96	1,982 27
17	1,230 45	37	1,568 2	57	1,755 87	77	1,886 49	97	1,986 77
18	1,255 27	38	1,579 78	58	1,763 43	78	1,892 09	98	1,991 23
19	1,278 75	39	1,591 06	59	1,770 85	79	1,897 63	99	1,995 64
20	1,301 03	**40**	1,602 06	**60**	1,778 15	**80**	1,903 09	**100**	2

Déterminer les logarithmes décimaux des nombres $2,1$, $\dfrac{1}{3}$, $\sqrt{245}$.

3. Kepler remarqua que deux loagrithmes sont distincts à un coefficient près, en particulier $\log_{10}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.
Déterminer le logarithme népérien du nombre $1,44$.

4. Ce travail peut être complété avec l'algorithme de CORDIC.