Activité en cinquième : Les rationnels et les suites décimales

<u>Activité proposée aux élèves :</u>

En effectuant la division de 5 par 6, on trouve 0,833… ,
les points de suspension indiquent que la suite des chiffres 3 est illimitée.

En effectuant la division de 4 par 11, on trouve : 0,3636…,
les points de suspension indiquent que la suite des chiffres 3 et 6 est illimitée.

On dit que les quotients qui représentent **une suite décimale infinie périodique** ne sont pas des décimaux.

En effectuant la division de 3 par 8, on trouve 0,875.

Si le nombre de chiffre après la virgule est **limité ou fini,** alors le quotient est un nombre décimal.

Question posée aux élèves :

En utilisant la calculatrice, conduire une recherche sur la partie décimale obtenue par division de nombres entiers simples.

Noter les opérations et affichages obtenus.

Dire si le résultat semble décimal ou non.

Comparer les résultats obtenus en faisant attention à l'organisation de la période.

Analyse de l'activité :

Cette activité peut être donnée à tous les niveaux des classes de collège.

Elle prend place dans un dispositif de travail de groupe.

L'élève doit choisir ses nombres et savoir observer les résultats obtenus. C'est ce type de travail (liberté de choix et de conclusion) qui est la plus troublante pour lui. Trop souvent, les mathématiques lui apparaissent comme un domaine où l'intuition et l'imagination n'ont pas de place.

Selon les classes, les objectifs atteints ne sont pas les mêmes.

Voici quelques résultats auxquels, on peut prétendre atteindre.

- ✓ Les divisions par 2, 4 , 8 , 10 donnent des quotients décimaux et les parties décimales présentent des formes pour lesquelles on obtient de nombreux commentaires.

  Division par 4 :
  $1 \div 4 = 0.25$
  $2 \div 4 = 0.5$
  $3 \div 4 = 0.75$

  Division par 5 :
  $1 \div 5 = 0.2$
  $2 \div 5 = 0.4$
  $3 \div 5 = 0.6$
  $4 \div 5 = 0.8$

  Division par 8 :
  $1 \div 8 = 0.125$
  $2 \div 8 = 0.25$
  $3 \div 8 = 0.375$
  $4 \div 8 = 0.5$
  $5 \div 8 = 0.625$
  $6 \div 8 = 0.75$
  $7 \div 8 = 0.875$

Division par 10 :

$1 \div 10 = 0.1$

$2 \div 10 = 0.2$

$3 \div 10 = 0.3$

$4 \div 10 = 0.4$

$5 \div 10 = 0.5$

$6 \div 10 = 0.6$

$7 \div 10 = 0.7$

$8 \div 10 = 0.8$

$9 \div 10 = 0.9$

✓ Les divisions par 3, 6 ,12 donnent des quotients non-décimaux de période 3 ou 6 sauf pour les multiples de 3 pour lesquels les quotients sont décimaux.

Division par 3 :

$1 \div 3 = 0.333333333...$

$2 \div 3 = 0.666666666...$

Division par 6 :

$1 \div 6 = 0.1666666666...$

$2 \div 6 = 0.333333333...$

$3 \div 6 = 0.5$

$4 \div 6 = 0.666666666...$

$5 \div 6 = 0.8333333333...$

Division par 12 :

$1 \div 12 = 0.083333333...$

$2 \div 12 = 0.166666666...$

$3 \div 12 = 0.25$

$4 \div 12 = 0.333333333...$

$5 \div 12 = 0.416666666...$

$6 \div 12 = 0.5$

$7 \div 12 = 0.583333333...$

$8 \div 12 = 0.666666666...$

$9 \div 12 = 0.75$

$10 \div 12 = 0.833333333...$

$11 \div 12 = 0.916666666...$

Division par 9 :

$1 \div 9 = 0.111111111...$

$2 \div 9 = 0.222222222...$

$3 \div 9 = 0.333333333...$

$4 \div 9 = 0.444444444...$

$5 \div 9 = 0.555555555...$

$6 \div 9 = 0.666666666...$

$7 \div 9 = 0.777777777...$

$8 \div 9 = 0.888888888...$

✓ Voici quelques résultats qui dénotent une curiosité plus acérée :

Division par 7 :

$1 \div 7 = 0.142857142...$

$2 \div 7 = 0.285714285...$

$3 \div 7 = 0.428571428...$

$4 \div 7 = 0.571428571...$

$5 \div 7 = 0.714285714...$

$6 \div 7 = 0.857142857...$

Ces résultats font penser à une même période formée des six chiffres 142857.
Remarquons également que la période ne change pas avec le nombre divisé.

Division par 13 :

$1 \div 13 = 0.076923076...$

$2 \div 13 = 0.153846153...$

$3 \div 13 = 0.23076923...$

$4 \div 13 = 0.307692307...$

$5 \div 13 = 0.384615384...$

$6 \div 13 = 0.461538461...$

$7 \div 13 = 0.538461538...$

$8 \div 13 = 0.615384615...$

$9 \div 13 = 0.692307692...$

$10 \div 13 = 0.769230769...$

$11 \div 13 = 0.846153846...$

$12 \div 13 = 0.923076923...$

De ces résultats, on peut penser à deux périodes de six chiffres qui seraient 076923 et 153846.

Division par 11 :

$1 \div 11 = 0.09090909...$

$2 \div 11 = 0.181818181...$

$3 \div 11 = 0.272727272...$

$4 \div 11 = 0.363636363...$

$5 \div 11 = 0.454545454...$

$6 \div 11 = 0.545454545...$

$7 \div 11 = 0.636363636...$

$8 \div 11 = 0.727272727...$

$9 \div 11 = 0.818181818...$

$10 \div 11 = 0.909090909...$

On obtient des périodes de deux chiffres dont la somme est 9.
On a donc les possibilités 09 ; 18 ; 27 ; 36 ; 45 et leurs symétriques.
Des remarques sont également possibles pour les divisions par 14 et 17.

Conclusion de l'activité :

Ces travaux d'approche permettent de commencer à se rendre compte de la différence qui existe entre décimaux et non-décimaux.
D'autre part, ces découvertes sur les suites décimales doivent encourager l'élève à aller plus loin dans sa détermination, car dans nombre de cas, il n'y avait pas de présomption de période.
Si, malgré les grandes capacités des matériels de calcul mis à notre disposition, la période n'est pas toujours visible au premier calcul, il faut aller plus loin. Il est très souvent nécessaire de dépasser les dix chiffres permis par l'affichage.

Comment faire ?

Prenons par exemple $23 \div 17$:

On va pour cela utiliser la division euclidienne : (c'est soit un moyen de l'introduire, soit une façon de la faire vivre…)

On part du fait que la division entière de A par B s'écrit :

A = BQ + R où $0 \le R < B$, Q étant le quotient entier et R le reste.

Ici A = 23 et B = 17.

En multipliant par 10 chaque reste, et en se replaçant dans la situation ci-dessus (division euclidienne), on obtient une nouvelle décimale.

Il ne reste plus qu'à traduire par un algorithme la démarche et utiliser un tableur.

- 1. Demander le nombre A
- 2. Demander le nombre B
- 3. Calculer A + B et prendre sa partie entière Q.
- 4. Afficher Q.
- 5. Calculer R = A – BQ
- 6. A prend pour valeur $R \times 10$.
- 7. Reprendre à l'étape 3.

En utilisant un tableur pour $23 \div 17$:

	A	B	C	D	E
1	Dividende	Diviseur	Quotient	Reste	
2	23	17	1	6	
3	60	17	3	9	
4	90	17	5	5	
5	50	17	2	16	
6	160	17	9	7	
7	70	17	4	2	
8	20	17	1	3	
9	30	17	1	13	
10	130	17	7	11	
11	110	17	6	8	
12	80	17	4	12	
13	120	17	7	1	
14	10	17	0	10	
15	100	17	5	15	
16	150	17	8	14	
17	140	17	8	4	
18	40	17	2	6	
19	60	17	3	9	
20	90	17	5	5	
21	50	17	2	16	
22	160	17	9	7	
23	70	17	4	2	
24	20	17	1	3	
25					

Dans la colonne C, on voit apparaître la période. On a :
$23 \div 17$ =1.3529411764705882**352941176405822**… (15 chiffres !!)

Avec $21 \div 19$, on obtient une période à 18 chiffres.
1.105263157894736842**105263157894736842…**

Avec $5 \div 23$, on obtient une période à 22 chiffres.
0.2173913043478260869565**2173913043477826086956 5…**

Avec $25 \div 649$, on obtient une période à 58 chiffres !!!
0.03852080123266563944530046224961479198767334360554699537750**385208012326656**
394453004622496147919876733436055469953775 0…