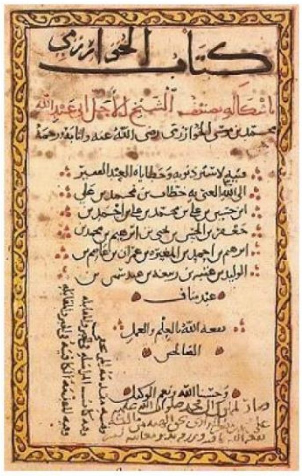
Introduction aux nombres complexes : De la résolution des équations

à l'invention des nombres complexes

« Les chemins de la création sont imprévisibles et résultent parfois d'audacieuses transgressions des règles et savoirs établis »
(Jean Le Rond d'Alembert)

Les mathématiques ne se découvrent (ou ne se créent) que très lentement. Parfois, c'est en cherchant sur un certain type de problèmes que l'on découvre ou crée des mathématiques assez éloignées du problème initial. C'est le cas des nombres complexes. Ici, le problème initial est la résolution d'équations du troisième degré.



Partie 1 : Les équations du second degré (Moyen âge)

Depuis l'antiquité, les mathématiciens ont cherché des méthodes de résolution d'équations.

Au Moyen-Age, les savants arabes reprennent et enrichissent les écrits grecs et indiens. Ils progressent notamment dans la résolution des équations.
Les méthodes utilisées sont géométriques ou algorithmiques et ont peu de rapport avec notre écriture algébrique actuelle. Les mathématiciens assimilaient les longueurs à des nombres pour résoudre des équations

Ainsi au IXe siècle à Bagdad, Al-Khwarizmi (vers 780-850) publie un manuscrit « *Abrégé de calcul par la restauration* [Al-jabr] *et la comparaison* [al-muqabala].
A cette époque, les équations n'avaient pas encore la forme que nous connaissons, et elles étaient écrites en toutes lettres et formaient des phrases. Le mot « bien » ou « chose » désignait l'inconnue et « nombres » les coefficients de l'équation. Al-Khwarizmi proposait des algorithmes sous forme de consignes, qu'il suffisait d'appliquer successivement pour parvenir à la solution.
En particulier, Al-Kwarizmi traite des équations du second degré. Par exemple il reprend un vieux problème grec (Diophante) : trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit. Il constate que cela revient à résoudre une équation du second degré.

Question 1 : Trouver 2 nombres dont la somme est 4 et le produit vaut 1.

Plus tard, à l'époque de Cardan (Girolamo Cardano (1501-1576)) dont nous parlerons ensuite, une méthode habituelle pour résoudre des problèmes sera de se ramener à la recherche de deux nombres connaissant leur somme et leur produit.

Partie 2 : Les équations du troisième degré (renaissance italienne) -(1545)

Le savoir des Arabes s'est transmis en Europe par l'Espagne (Tolède), les croisades, les voyages (Fibonacci, Marco Polo, …).
Les mathématiciens arabes des XI° et XII° siècle ont essayé de résoudre « par la géométrie » des équations du troisième degré. Ils ont buté sur la résolution algébrique. En occident, jusqu'au XVI° siècle, les efforts de résolution n'aboutiront pas vraiment.

Dans la première moitié du XVIe siècle, en Italie, des savants (del Ferro, Fior, Tartaglia, Cardano, Ferrari, Bombelli) cherchent à résoudre les équations du 3e degré.

Scipione Del Ferro (1465-1526) détermine des méthodes, qu'il ne divulgue pratiquement pas, pour résoudre certaines formes d'équations du 3ème degré. Peu avant sa mort, il montre ses méthodes à l'un de ses élèves, Antonio Maria Fior.
La mode était à l'époque aux concours mathématiques. Cela permettait d'arrondir ses fins de mois et d'acquérir la célébrité, ou un poste à l'université. En 1535, Fior lance un défi à Niccolo Fontana, dit Tartaglia (1499-1557), mathématicien bègue mais ayant une certaine réputation. Fior ne sait résoudre que les équations du type $x^3 + ax = b$ où a et b sont positifs (car à cette époque, les nombres négatifs n'existent pas). A force de recherche, Tartaglia trouve la procédure générale de résolution des équations de 3ème degré, et parvient peu avant le dénouement du concours à résoudre tous les problèmes qui lui ont été posés De son côté, Fior, plutôt médiocre, ne vient pas à bout des problèmes variés soumis par Tartaglia. Ce dernier remporte brillamment le concours.
Tartaglia acquiert alors une certaine notoriété et le bruit de la résolution des équations du 3ème degré parvient jusqu'à Girolamo Cardano (1501-1576), professeur renommé de mathématiques à Milan. Tartaglia refuse d'abord de révéler sa découverte, souhaitant écrire lui-même un ouvrage sur le sujet. Mais dans des circonstances un peu scabreuses, Cardan réussit à le convaincre de lui révéler sa méthode, lui promettant sur la bible de la garder secrète, et de ne rien publier sans son accord.
De retour à Milan, Cardan se met alors à tester les formules, elles fonctionnent à merveille mais il lui manque tout de même une démonstration. C'est à cette tâche que s'attèlent Cardan, son élève et collaborateur Lodovico Ferrari (1522 – 1565). Ils sont amenés à rencontrer le gendre de Scipione Del Ferro, Annibale Dela Nave (1500 – 1558), et découvrent alors d'anciennes notes

de Scipione Del Ferro, dans lesquelles ils constatent que c'est bien lui qui a trouvé en premier certaines des formules données par Tartaglia permettant de résoudre les équations du 3ème degré.
Cardan s'estime alors délivré de sa promesse, et ne tarde pas à publier un grand traité d'algèbre, *Ars Magna* (1545), dans lequel figurent en particulier les méthodes de Tartaglia, qu'il a toutefois largement enrichies, en donnant une étude complète des équations de degré 3.
Tartaglia, se sentant floué, proteste. S'en suit alors une controverse entre les deux hommes, dans laquelle Tartaglia perdra une partie de sa réputation.

Méthode dite de Cardan pour résoudre une équation du type : $\boldsymbol{x^3 = px + q}$ où $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ sont deux entiers naturels.

Il souhaite par exemple résoudre $x^3 = 36x + 91$. L'idée est de chercher x en l'écrivant $x = u + v$.

Question 2 : Pourquoi, dans ces conditions, suffit-il d'avoir $u^3 + v^3 = 91$ et $uv = 12$?

La deuxième condition peut s'écrire $u^3v^3 = 12^3$, et ainsi u^3et v^3 sont donnés par leur somme et leur produit.
On sait donc les calculer ce qui fournit u et v puis x.

Cardan démontre que si le nombre $d = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ est positif ou nul, alors l'équation $x^3 = px + q$ admet pour solution le nombre

$$s = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{d}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{d}}$$

Nommée aujourd'hui formule de Tartaglia-Cardan.

La notation $\sqrt[3]{a}$ désigne la racine cubique de a, c'est-à-dire le nombre dont le cube est a : par exemple, $\sqrt[3]{125} = 5$ car $5^3 = 125$

<u>Approfondissement :</u> retrouver la formule de Tartaglia-Cardan

<u>Aide :</u> deux nombres ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont solution de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$

Question 3 :

1. Dans cette question, on s'intéresse à l'équation $x^3 = 9x + 28$. Appliquer la méthode de Cardan : quelle valeur de s obtient-on ? Vérifier que cette valeur est bien solution de l'équation.
2. a. Dans cette question, on s'intéresse à l'équation $x^3 = 15x + 4$. Peut-on appliquer la méthode de Cardan ? Pourquoi ?

b. A l'aide d'une calculatrice graphique, conjecturer l'existence éventuelle de solutions.

<u>Partie 3 : L'audace de Bombelli qui utilise des « nombres impossibles » (1572)</u>

Rafael Bombelli (1526 – 1572), ingénieur italien, admirateur de Cardan, fut l'un des grands algébristes italiens du XVIème siècle. Il rédige dans les années 1560 son unique ouvrage mathématique *Algebra,* qui ne sera publié qu'en 1572 et dans lequel émerge une formulation plus abstraite et théorique de l'algèbre.

Dans de nombreuses situations, les formules de Cardan nécessitent l'écriture de racines carrées de nombres négatifs. Ce qui est impossible selon la règle des signes : le carré d'un nombre positif est positif tout comme le carré d'un nombre négatif. Aucun nombre multiplié par lui-même ne peut donner un nombre négatif. Ces racines carrées n'existent tout simplement pas. Néanmoins, si l'on applique ces formules avec ces racines négatives, la méthode de Cardan fournit le bon résultat.

Il décide d'utiliser la méthode de Cardan en faisant comme si un nombre négatif pouvait être le « carré de quelque chose » ! il va utiliser $\sqrt{-121}$ (écriture algébrique actuelle, dont ne disposait pas Bombelli), sans chercher à donner un sens à ce nombre, mais comme un outil de calcul. Une nouvelle espèce de nombre est née.

1. Vérifier que si l'on accepte d'utiliser les « nombres impossibles » $\sqrt{-121}$ et $\sqrt{-1}$, la solution de l'équation $x^3 = 15x + 4$ obtenue avec la méthode de Cardan s'écrit : $s = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$.
2. En utilisant l'identité remarquable $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, et en tenant compte que $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$, montrer que $\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$.

3. De la même façon, calculer $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3$.
4. Déduire des questions 2 et 3 une valeur simple de s. Le nombre obtenu est-il solution de l'équation $x^3 = 15x + 4$?

5. L'équation $x^3 = 15x + 4$ est alors équivalente à $x^3 - 15x - 4 = 0$.
Comme 4 est solution de cette équation, on en déduit que l'on peut factoriser le premier membre de l'équation par $(x-4)$ autrement dit il existe un polynôme de degré 2 tel que :
$x^3 = 15x + 4 \Leftrightarrow (x-4)(ax^2 + bx + c) = 0$.

Déterminer les valeurs de a, b, c puis résoudre l'équation.

1. Eguale à 15. p. 4.
5. 2.
5. 2.
25. 4.
5. 125.
125. R.q.p.di m.121.
2 2
Somma R.q.p.di m.121. Resta R.q.p.di m. 121.
R.c.L.2.p.di m.11.] R.c.L.2.m.di m.11.
Lato 2.p.di m.1. 2.m.di m.1.
Sommati fanno 4. che è la ualuta del Tanto.

<u>Conclusion :</u> Bombelli a ainsi imaginé une chose qui n'est ni un nombre positif, ni un nombre négatif, mais dont le carré vaut –1, et qui est très utile pour trouver les solutions réelles d'une équation. Il nomme cette chose « piu di meno » (*plus de moins*). Nous la noterons provisoirement $\sqrt{-1}$. Ainsi : $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$

6. Voici un extrait de l'*Algebra* de Raphaël Bombelli (page 169) ainsi qu'une partie des traductions algébriques. Compléter les traductions manquantes à l'aide de la traduction située sous le texte.

Più uia più di meno, fà più di meno.	$+1 \times \left(+\sqrt{-1}\right) = +\sqrt{-1}$
Meno uia più di meno, fà meno di meno.	$-1 \times \left(+\sqrt{-1}\right) = -\sqrt{-1}$
Più uia meno di meno, fà meno di meno.	…………………………………………………
Meno uia meno di meno, fà più di meno.	…………………………………………………
Più di meno uia più di meno, fà meno.	…………………………………………………
Più di meno uia men di meno, fà più.	…………………………………………………
Meno di meno uia più di meno, fà più.	…………………………………………………
Meno di meno uia men di meno fà meno.	…………………………………………………

Traduction :
Piu : $+$ (ou $+1$) Meno : $-$ (ou -1) Uia : multiplié par Fà : fait

Grâce à ces nombres dits « impossibles » Bombelli retrouvait une solution réelle de l'équation $x^3 = 15x + 4$ et généralisait ainsi la méthode de Cardan (A cette époque les nombres négatifs étaient aussi des quantités impossibles).

Peu à peu, ces nouvelles choses vont être utilisées dans les calculs algébriques, et pas seulement pour résoudre les équations de degré 3. Descartes les nommera, dans sa *Géométrie*, en 1637, "quantités imaginaires". D'autres continueront longtemps de les nommer "quantités impossibles".

Partie 4 : <u>Euler remet en cause la notation $\sqrt{-1}$ (1774)</u>

Dans un texte de 1774 Euler écrit :
"Maintenant comme $-a$ signifie autant $+a$ multiplié par -1, et que la racine quarrée d'un produit se trouve en multipliant ensemble les racines des facteurs, il s'ensuit que la racine de a multiplié par -1, ou $\sqrt{-a}$ est autant que $\sqrt{a}$ multiplié par $\sqrt{-1}$ *. Or $\sqrt{a}$ est un nombre possible ou réel, par conséquent ce qu'il y a d'impossible dans une quantité imaginaire peut toujours se réduire à $\sqrt{-1}$. (…) De plus comme $\sqrt{a}$* multiplié par $\sqrt{b}$ fait $\sqrt{ab}$*, l'on aura $\sqrt{6}$ pour la valeur de $\sqrt{-2}$ multiplié par $\sqrt{-3}$."*

1. En appliquant les règles énoncées par Euler, compléter : $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\times(-1)} = \cdots$
2. Or, $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$. Est-ce compatible ?

Euler prend conscience de cette difficulté et juge cette notation absurde. En 1777, il introduit une notation pour ce nombre dont le carré est -1 : i (comme impossible, imaginaire...). Ainsi $i^2 = -1$.

Sitographie :

https://www.apmep.fr/Nombres-complexes-en-terminale-S (Louis Marie Bonneval)
https://www.apmep.fr/Introduction-aux-nombres-complexes (Anne Boyé)
https://www.apmep.fr/Introduction-aux-nombres-complexes,4227 (Martine Bülher)
http://mathematica.sns.it/media/volumi/9/L'algebra_bw.pdf (L'*Algébra* de Bombelli)
https://www.univ-irem.fr/spip.php?article1355 (Bombelli, l'Algebra, IREM de Rennes)