

Calcul littéral en 4^e – Présentation de la séquence

Adaptation de la méthode de Singapour : Expérimentation menée dans deux classes

Niveau : 4^e

Période dans l'année scolaire : Décembre (Fin 1^{er} trimestre, début 2nd trimestre)

Extraits du programme officiel :

Utiliser le calcul littéral	
Mettre un problème en équation en vue de sa résolution. Développer et factoriser des expressions algébriques dans des cas très simples. Résoudre des équations ou des inéquations du premier degré. » Notions de variable, d'inconnue. Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture.	Comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant et employant des formules liées aux grandeurs mesurables (en mathématiques ou dans d'autres disciplines). Tester sur des valeurs numériques une égalité littérale pour appréhender la notion d'équation. Etudier des problèmes qui se ramènent au premier degré (par exemple, en factorisant des équations produits simples à l'aide d'identités remarquables). Montrer des résultats généraux, par exemple que la somme de trois nombres consécutifs est divisible par 3.

Repères de progressivité :

Dès le début du cycle 4, les élèves comprennent l'intérêt d'utiliser une écriture littérale. Ils apprennent à tester une égalité en attribuant des valeurs numériques au nombre désigné par une lettre qui y figure. À partir de la 4^e, ils rencontrent les notions de variables et d'inconnues, la factorisation, le développement et la réduction d'expressions algébriques. Ils commencent à résoudre, de façon exacte ou approchée, des problèmes du 1^{er} degré à une inconnue, et apprennent à modéliser une situation à l'aide d'une formule, d'une équation ou d'une inéquation. En 3^e, ils résolvent algébriquement équations et inéquations du 1^{er} degré, et mobilisent le calcul littéral pour démontrer. Ils font le lien entre forme algébrique et représentation graphique.

Compétences mathématiques travaillées :

Chercher

- S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture.

Raisonner

- Mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui.
- Démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion.

Calculer

- Calculer en utilisant le langage algébrique (lettres, symboles, etc.).

Communiquer

- Faire le lien entre le langage naturel et le langage algébrique. Distinguer des spécificités du langage mathématique par rapport à la langue française.

- Expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme), comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange

Représenter

- Choisir et mettre en relation des cadres (numérique, algébrique, géométrique) adaptés pour traiter un problème ou pour étudier un objet mathématique.
- Produire et utiliser plusieurs représentations des nombres.

Modéliser

- Traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple, à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques).

Prérequis nécessaires : Voir fiche « prérequis »

Présentation des deux classes dans lesquelles l'expérimentation a été menée :

- Classe A : 26 élèves

Classe d'un très bon niveau mathématique global.

Niveau de fin du premier trimestre**	Niv 1	Niv 2	Niv 3	Niv 4
Effectif	1	2	5	18

- Classe B : 25 élèves

Classe d'un niveau mathématique global correct, avec une proportion assez forte d'élèves ayant des difficultés de compréhension.

Niveau de fin du premier trimestre**	Niv 1	Niv 2	Niv 3	Niv 4
Effectif	5	6	3	11

** Niveau établi à partir d'une évaluation des compétences, sans note, prenant en compte l'évolution des acquis des élèves.

Définition du « minimum attendu » au second trimestre de la classe de 4^e :

- Développer et réduire des expressions simples du type $5(4x + 2)$ ou $(7x - 3) \times x$
- Ecrire l'expression algébrique, développée et réduite, associée à un programme de calcul
- Factoriser des expressions simples du type $7x + 7y$ ou $5x - 20$ ou $x^2 - 5x$
- Réduire une expression littérale, en respectant les règles de suppression de parenthèse, du type $(6x + 4) - (3x - 5)$ ou $7 - (-3x + 2)$
- Savoir développer et réduire des expressions simples du type $6(3x - 2) - 4(2x + 3)$

Séance	Objectif de la séance	Compétences mathématiques travaillées	Contenus, supports et structure	Commentaire et obstacles envisagés (Analyse a priori)	Retour d'expérimentation	Travail demandé pour la séance suivante
Séance 1 1h	Mise en évidence de la distributivité simple	<i>Chercher</i> <i>Raisonnement</i> <i>Calculer</i> <i>Communiquer</i> <i>Modéliser</i>	Fiche d'activité n°1 en îlots Calculatrices autorisées	<p>La première partie ne devrait pas poser problème. En effet, les élèves travaillent avec des entiers positifs. La multiplication vue comme une addition itérée a été utilisée par les élèves de l'activité d'introduction à la multiplication de deux relatifs. Les élèves « répéteront bien les ronds 5 fois et le rectangle 5 fois également ».</p> <p>Pour la deuxième partie, les élèves auront sûrement du mal à voir ce qui est attendu. En effet, la traduction du sac par des parenthèses n'est pas naturelle. Les élèves dessineront peut-être les sacs. Cependant, cette représentation sera un point d'appui pour introduire la notation avec les parenthèses. L'idée est d'arriver, pour la situation 1, à une écriture de la forme « (3 ronds + 1 rectangle) x 5 = 15 ronds + 5 rectangles » en mettant en évidence que les parenthèses représentent le sac.</p> <p>La troisième partie est très importante car elle permet aux élèves d'acquérir le principe de développement naturellement, en lien avec la manipulation précédente. Cela permettra, dans la quatrième partie, de transférer ce savoir-faire à des éléments autre que des ronds et des rectangles et ainsi pouvoir aborder la phase abstraite.</p> <p>Dans cette activité, toutes les multiplications proposées sont issues des tables de 2, 3, 4, 5 et 10 afin d'éviter au maximum que des difficultés en calcul mental ne soit un obstacle.</p>	<p>Aucun élève n'a utilisé la calculatrice et aucune erreur de calcul n'a été faite. La calculatrice n'était ici pas utile pour les élèves qui étaient en mesure d'effectuer tous les calculs de tête.</p> <p>La structure en îlots a permis aux élèves de tous avancer. En effet, comme il y avait un sachet par îlot, tous les membres de l'îlot devaient travailler ensemble. Ainsi, l'échange de points de vue s'est fait naturellement et, lors de désaccord, chacun a pu argumenter, ce qui a permis à tous les membres d'avancer en même temps.</p> <p>La troisième étape a été faite sans le moindre souci. En effet, tous les élèves avaient compris le principe de distributivité et de « répétition de chacun des éléments ». Certains élèves, lors de la mise en commun, ont bien</p>	Finir l'exercice 1 de la fiche d'exercices n°1

					<p>dit « on multiplie chaque morceau » en appelant « morceau » les termes de la somme.</p> <p>Les nombres décimaux n'ont pas posé de problème au niveau de la distributivité. Cependant, certains élèves ont demandé aux autres membres de l'îlot « Ca fait combien $2,4 \times 10$? ». Les élèves ont préféré demander à quelqu'un qu'ils jugeaient capable de répondre plutôt que d'utiliser leur calculatrice.</p> <p>Sur les deux classes (51 élèves), seuls deux élèves ont ressenti le besoin d'écrire le détail des calculs après la première synthèse. Ceci est dû au fait que lors de la première partie, les élèves ont écrit directement le résultat trouvé « 15 ronds et 5 rectangles ». De plus, ce qui avait été établi lors de la mise en commun : « Vous n'êtes pas obligés d'écrire le détail des calculs ». Les étapes de calculs ont donc été présentées comme optionnelles et beaucoup</p>	
--	--	--	--	--	--	--

					<p>d'élèves les trouvent donc inutiles.</p> <p>Dans la quatrième partie, des élèves, ayant hésité à généraliser ce qui précédait au « - », ont écrit :</p> $5 \times (2x - 6) = 10x + (-30)$	
			<p>Fiche d'exercices n°1 individuellement (en îlots pour les élèves qui présentent des difficultés notamment dans la compréhension de la consigne → différenciation des structure)</p> <p>Calculatrices autorisées</p>	<p>L'objectif est de commencer l'exercice 1 de la fiche d'exercices qui sera à finir à la maison.</p> <p>L'objectif de cette fiche est de faire manipuler aux élèves la distributivité simple dans le cadre du développement et dans la cadre de la factorisation, sans définir ces deux actions, de sorte à ce que les élèves se les approprient « naturellement ».</p>	<p>La factorisation s'est faite très naturellement. Les élèves ont écrit des choses comme, pour la forme factorisée de $7t + 14$: « $7(t + 2)$ » ou encore « $2 \times (3,5t + 7)$ ».</p>	
Séance 2 1h	Développer et factoriser	<i>Calculer</i>	<p>Questions flash n°1 individuellement</p> <p>Calculatrice interdite</p>	<p>Les questions flash ont un double objectif :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Une réactivation de ce qui a été vu dans la séance précédente • Une occasion de remédier à d'éventuelles incompréhensions 	<p>Les élèves ont été particulièrement volontaires, et notamment les élèves les plus faibles qui ont l'habitude de ne pas participer. En effet, les élèves les plus en difficulté ne proposent pas souvent leurs réponses, car ils pensent que leur réponse est fausse. Ici, ce n'était pas</p>	
			<p>Correction de l'exercice 1 de la fiche d'exercices n°1</p>			

					le cas et ces élèves ont lever la main et étaient sûrs d'eux*.
			Exercices 2 et 3 de la fiche d'exercices n°1 individuellement Calculatrice autorisée	Les obstacles seront sur les expressions C et D de l'exercice 2 car ce sont les cas les plus abstraits (où il est impossible de se ramener à la manipulation et où la représentation imagée ne fonctionne plus). Plusieurs élèves écriront sûrement « $7x(3x + 1) = 21x + 7$ ». Il sera alors intéressant d'effectuer, à ce moment, avec les élèves, au tableau, « $7(3x + 1)$ » puis d'engager une discussion, avec toute la classe, autour de « $7x(3x + 1)$ » afin que ce soit les élèves qui apportent la réponse et l'explication qui va avec.	La question C a été problématique pour plusieurs élèves (entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ des élèves). Cette difficulté est assez naturelle car elle est entièrement déconnectée du cas pratique, de la manipulation de la séance 1. « rond multiplié par rond » n'a pas beaucoup de sens au niveau de la manipulation. La discussion proposée a permis à la grande majorité des élèves de dépasser l'obstacle. Pour le professeur : Néanmoins, c'est un point sur lequel il faudra revenir lors des questions flash, par exemple.
			Cours : I.	L'institutionnalisation arrive après les exercices, quand tout de l'objectif d'apprentissage a été vu, de sorte à ce que les élèves complètent eux-mêmes le cours, sans le professeur (qui validera ensuite et complétera si besoin), comme une synthèse générale de la notion abordée et des apprentissages effectués. Les élèves ont l'habitude de cette pratique.	

				<p>C'est à ce moment-là que sont formalisées et définies, les actions « développer » et « factoriser ».</p> <p>Pour l'exercice du cours, les élèves seront invités à présenter les calculs de cette manière :</p> $x \xrightarrow{\times 3} 3x \xrightarrow{-1} 3x - 1 \xrightarrow{\times 5} 15x - 5 \xrightarrow{-2x} 13x - 5$ <p>Cette écriture a déjà été utilisée à plusieurs reprises lors de l'application de programmes de calculs à des nombres relatifs donnés.</p> <p>Cette écriture est inspirée du travail de l'IREM (cf. REPERES - IREM. N° 92 - juillet 2013 – pp.1-25, <i>Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège</i>)</p>		
Séance 3 1h	Réduire une expression littérale en respectant les règles de suppression de parenthèses, à l'aide d'une schématisation	<i>Chercher</i> <i>Raisonner</i> <i>Calculer</i> <i>Communiquer</i> <i>Modéliser</i>	<p>Questions flash n°2 individuellement</p> <p>Calculatrice interdite, puis autorisée</p>	<p>Les questions flash ont un double objectif :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Une réactivation de ce qui a été vu dans la séance précédente • Une occasion de remédier à d'éventuelles incompréhensions <p>Normalement, les développements du type $(5x + 7) \times 3x$ devraient être mieux réussis. En effet, suite à la séance 2 où une attention particulière a été apportée aux cas comportant un « $x \times x$ ».</p>	<p>Pour un ou deux élèves par classe, les réponses écrites étaient de la forme « $(5x + 7) \times 3x = 15x^2 + 21$ ». Une attention avait été apportée au premier terme et au « $x \times x$ » mais pas au second.</p> <p>Ce point sera retravaillé dans la suite de la séquence.</p>	<p>Exercice 1 de la feuille d'exercices n°2</p> <p>Les élèves ont le choix, dans cet exercice, de faire, ou non, l'étape de schématisation.</p>
			<p>Fiche d'activité n°2 en îlots</p> <p>Calculatrices autorisées</p>	<p>Les trois premières parties ne devraient pas poser problème, étant donné que les élèves ont manipulé les différentes écritures dans la fiche d'activité n°1.</p> <p>La quatrième partie est en deux temps : les deux premiers points qui ne devraient pas poser problème et la suite qui est très difficile en termes d'abstraction.</p> <p>Dans une précédente version (proposée à la classe A) de cette fiche d'activité, la partie « schématisation » n'apparaissait pas et le passage du concret à l'abstrait a été difficile pour une grande partie des élèves. Le professeur s'est alors adapté lors de l'activité et a proposé la</p>	<p>Les élèves ont rencontré de réels problèmes avec l'addition et la soustraction de relatifs.</p> <p>Afin de limiter le parasitage des apprentissages par ces lacunes de calculs, les élèves ont été invités à utiliser leur calculatrice.</p>	

				<p>schématisation proposée dans cette seconde version de la fiche, ce qui a permis aux élèves de revenir à une étape imagée (pas tous car certains étaient déjà convaincus que cela allait être hors de leur portée* ou ne voulaient pas du dessin car le passage « abstrait - schéma » était perçu comme « rabaissant/infantilisant » et certains voulaient (se) prouver qu'ils étaient capables*).</p> <p>Dans la classe B, la partie schématisation a été faite dès le début, ce qui a évité la résignation de certains élèves observée dans la première classe.</p> <p>Une difficulté majeure que risquent de rencontrer les élèves sera l'addition et la soustraction de relatifs pour la réduction. C'est pourquoi la calculatrice est autorisée.</p>	<p>Important : Il est indispensable de passer du temps sur cette schématisation, d'apprendre à raisonner avec, avant de pouvoir s'en passer. Un « passage obligé » pour tout le monde semble nécessaire avant d'aborder l'abstraction complète.</p>	
Séance 4 1h	Réduire une expression littérale en respectant les règles de suppression de parenthèses, sans schématisation	<i>Calculer</i>	Questions flash n°3 individuellement	<p>Les questions flash ont un double objectif :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Une réactivation de ce qui a été vu dans la séance précédente • Un travail plus ciblé sur des cas plus délicats tels que la factorisation de $k^2 - kx$. 		
			Calculatrice interdite, puis autorisée			
			Correction de l'exercice 1 de la feuille d'exercices n°2	L'objectif ici est de faire les derniers ajustements nécessaires au passage à l'écriture de lignes successives présentant les différentes étapes des calculs, sans schématisation.	Très peu d'élèves à ce moment n'ont toujours pas compris la méthode (environ 2 élèves / classe)	
			Exercice 4 de la feuille d'exercices n°2	L'objectif de cet exercice est de passer à l'écriture de lignes successives présentant les différentes étapes des calculs et sans schématisation.	Cette étape n'a pas posé de problème particulier car les élèves avaient déjà écrit les différentes étapes de calcul dans les fiches d'exercices précédentes. Cette étape représentait donc juste une réorganisation des écritures déjà connues.	
			Exercices 1 et 2 de la feuille d'exercices n°3	L'objectif ici est de revenir sur la distributivité simple avant d'aborder la superposition de la distributivité et de la suppression de parenthèses.	Les deux exercices n'ont pas posé de problème	
			Evaluation	Les élèves ont à réduire les trois expressions suivantes :		

			<p>Calculatrice autorisée</p>	$A = (5x + 3) + (6x + 1)$ $B = (7y - 3) - (2y - 10)$ $C = 5 - (-3n + 7)$ <p>La première expression a pour objectif de mettre en évidence les problèmes de réduction du type « $5x + 6x = 11x^2$ » ou encore « $5x + 3 = 8x$ ».</p> <p>La seconde expression a pour objectif de repérer les erreurs de signes propres à la suppression de parenthèses.</p> <p>De plus, elle a pour objectifs de mettre en évidence les erreurs de réduction dues à l'addition et soustraction de relatifs.</p> <p>La troisième expression a pour objectif de voir comment les élèves réagissent face à cette configuration qui a été très peu vue.</p> <p>Les résultats de cette évaluation permettront de construire les questions flash qui seront proposées dans les prochaines séances en guise de remédiation.</p>	<p>* Classe A : Aucun élève / 23 * Classe B : Aucun élève / 23</p> <p><u>Pour la suppression de parenthèses :</u> * Classe A : 1 élève / 25 * Classe B : 1 élève / 23</p> <p><u>Problèmes de réduction dus aux relatifs :</u> * Classe A : 5 élèves / 25 * Classe B : 3 élèves / 23</p> <p>* Classe A: 4 élèves / 25 n'ont pas du tout su gérer cette situation (utilisation d'une mauvaise méthode) * Classe B : 4 élèves / 25 n'ont pas du tout su gérer cette situation (utilisation d'une mauvaise méthode)</p> <p>Pour la réduction, malgré le fait que la calculatrice soit autorisée, les élèves qui ont fait des erreurs ne l'utilisent pas.</p>	
--	--	--	-------------------------------	---	--	--

					<p>Les élèves ne sont pas conscients qu'ils n'arrivent pas à effectuer des calculs du type « $-5 - 3$ »</p> <p>Cette difficulté s'explique : les élèves ont eu pour habitude, en classe de 5^e, d'écrire que « soustraire c'est ajouter l'opposé ». Ensuite, ils ont eu l'habitude d'écrire les étapes en lien avec cette règle « $-5 - 3 = -5 + (-3) = -8$ ». Seul problème, mentalement, passer directement de $-5 - 3$ à -8 est difficile. Cette difficulté devra être anticipée et nécessitera un travail plus approfondi en classe de 5^e, notamment sur la partie « calcul mental ».</p>	
Séance 5 1h	Développer et réduire une expression à l'aide de la distributivité simple <u>et</u> des règles de suppression de parenthèses	<i>Chercher</i>	Questions flash n°4 individuellement	Ces questions flash ont été pensées après l'évaluation. C'est pourquoi toutes les questions sont du type $5 - (-3n + 7)$.		Exercice 1 de la feuille d'exercices n°4. Les élèves ont le choix, dans cet exercice, de faire, ou non, l'étape de schématisation.
		<i>Raisonner</i>	Calculatrice autorisée			
		<i>Calculer</i>	Cours : II. (pas l'exemple D)	Comme d'habitude, l'institutionnalisation arrive après les exercices, quand tout de l'objectif d'apprentissage a été vu, de sorte à ce que les élèves complètent eux-mêmes le cours, sans le professeur (qui validera ensuite et complètera si besoin), comme une synthèse générale de la notion abordée et des apprentissages effectués.		
		<i>Communiquer</i>	Fiche d'activité n°3, en îlots.	Les deux premières parties ne devraient pas poser problème, étant donné que les élèves ont manipulé les différentes écritures dans les fiches d'activités n°1 et n°2.		
		<i>Modéliser</i>				

			Calculatrices autorisées	<p>Dans la troisième partie, la schématisation à la fin de la troisième partie est indispensable et devra être bien comprise car ce sera le lien entre le concret et l'abstrait.</p> <p>Important : Il est indispensable de passer du temps sur cette schématisation, d'apprendre à raisonner avec, avant de pouvoir s'en passer. Un « passage obligé » pour tout le monde semble nécessaire avant d'aborder l'abstraction complète.</p> <p>La difficulté que représentent l'addition et la soustraction de relatifs pour la réduction sera toujours problématique. C'est pourquoi la calculatrice est autorisée.</p>		
Séance 6 1h	Développer et réduire des expressions complexes	<i>Calculer</i>	Questions flash n°5 individuellement	Ces questions flash ont pour but de traiter de quelques situations difficiles qui n'ont pas été traitées précédemment : $-(-3y + 7) - (5y - 3)$.		Exercice 2 de la feuille d'exercices n°5
			Calculatrice interdite, puis autorisée			
			Correction de l'exercice 1 de la feuille d'exercices n°4	L'objectif ici est de faire les derniers ajustements nécessaires au passage à l'écriture de lignes successives présentant les différentes étapes des calculs, sans schématisation.		
			Exercice 2 de la feuille d'exercices n°4	Cet exercice est difficile est a pour objectif d'aller plus loin. Cet exercice enchaîne plusieurs points techniques et il est à prévoir que plusieurs élèves n'arriveront pas à réussir cet exercice. Néanmoins, les objectifs de cet exercice sont au-delà du « minimum attendu ».		
			Cours : II. (Exemple D)	Comme d'habitude, l'institutionnalisation arrive après les exercices, quand tout de l'objectif d'apprentissage a été vu, de sorte à ce que les élèves complètent eux-mêmes le cours, sans le professeur (qui validera ensuite et complétera si besoin), comme une synthèse générale de la notion abordée et des apprentissages effectués.		
Exercice 1 de la feuille d'exercice n°5	L'objectif de cet exercice est de retravailler l'utilisation des nombres dans une situation de programme de calcul, le contre-exemple et la distributivité qui est le savoir-faire que					

				chaque élève doit absolument maîtrisée à ce stade de l'année.		
Séance 7 1h	Utiliser le développement pour prouver un résultat	<i>Calculer</i> <i>Raisonner</i>	Correction de l'exercice 2 de la fiche d'exercice n°5	Dans cette feuille d'exercices, utilise le développement pour prouver un résultat.		
			Exercice 3 de la fiche d'exercice n°5	Dans cet exercice, la distributivité est un outil utilisé pour prouver un résultat.		
			Evaluation formatrice Calculatrice autorisée	Chaque élève fait individuellement cette évaluation sur son cahier. Une fois qu'il a fini, il demande la fiche d'auto-évaluation pour la compléter au vu de ce qu'il a fait. En un second temps, sur les points qu'il n'a pas réussis, il échange avec les autres membres de son îlot pour essayer de comprendre ses erreurs. Si malgré ces échanges, l'élève ne comprend toujours pas ses erreurs, il sollicite le professeur qui intervient en dernier recours.		
Séance 8 30 min	Utiliser la factorisation pour prouver un résultat	<i>Calculer</i>	Questions flash n°6 individuellement Calculatrice autorisée	Les questions flash ont un double objectif : <ul style="list-style-type: none"> • Une réactivation de ce qui a été vu dans les séances précédentes, notamment la factorisation qui sera utile dans la suite de la séance. • Une occasion de remédier à d'éventuelles incompréhensions 		
		<i>Calculer</i> <i>Représenter</i> <i>Raisonner</i>	Feuille d'exercices n°6, en îlots. Calculatrice autorisée	Dans cette feuille d'exercices, on utilise la factorisation pour prouver un résultat.		

* Interprétation de l'enseignant.