COÏNCIDENCE OU PAS – FICHE PROFESSEURS

- **Durée : 30 minutes**
- **Niveau : à partir de l'enseignement de spécialité de première**
- **La situation-problème**

Trouver une méthode pour prouver si une conjecture est vraie ou fausse

- **Le(s) consigne(s) donnée(s) à l'élève**

Vous avez 30 minutes pour répondre à la question. Toute réponse même partielle sera examinée.

- **Réponses attendues**

On s'intéresse pour tout entier naturel n non nul à l'expression $n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1$.
C'est un polynôme du quatrième degré en n.
On essaie de l'écrire sous la forme du carré d'un …. Polynôme du second degré !
Autrement dit, on recherche des entiers a, b et c tels que :

Pour tout entier $n\geq 1$, $n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1=\left(an^2+bn+c\right)^2$
Méthode : développer et identifier les coefficients (a et c pouvant se déterminer de tête).
Travail sur calculatrice ou sur tableur

$1\times 2\times 3\times 4+1=25=5^2$

$2\times 3\times 4\times 5+1=121=11^2$

$3\times 4\times 5\times 6+1=361=19^2$

$4\times 5\times 6\times 7+1=841=29^2$

$5\times 6\times 7\times 8+1=1681=41^2$

$6\times 7\times 8\times 9+1=3025=55^2$

Effectivement, on obtient des carrés !
Mais mieux : à chaque fois, on obtient le carré du produit du premier et du dernier facteur auquel on ajoute 1 !!!
Conjecture de l'élève

Il semble que, pour tout entier $n\geq 1$, $n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1=[n(n+3)+1]^2$
Démonstration de l'élève
On pourrait s'attendre à un développement du type

$n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1=\left(n^2+n\right)\left(n^2+5n+6\right)+1=\ldots$ **pour le membre de gauche**

$[n(n+3)+1]^2=\left(n^2+3n+1\right)^2=\left(n^2+3n+1\right)\left(n^2+3n+1\right)=\ldots$ **pour le membre de droite.**

Mieux ! L'élève anticipe la forme du résultat à obtenir :

$n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1=[n(n+3)+1]^2$.

Il décide de développer le membre de gauche en laissant apparent le produit $n(n+3)$ **:**

$n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1=n(n+3)\underbrace{(n+1)(n+2)}+1=n(n+3)\left(n^2+3n+2\right)+1$.

Il poursuit sa stratégie avec n^2+3n+2**, en faisant apparaître le produit** $n(n+3)$ **:**

$n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1=n(n+3)[n(n+3)+2]+1=[n(n+3)]^2+2n(n+3)+1$.

Il ne lui reste plus qu'à reconnaître une identité remarquable, suggérée d'ailleurs par l'expression à obtenir, à savoir $[n(n+3)+1]^2$.

COÏNCIDENCE OU PAS – FICHE ELEVES

Énoncé

On a **:** $1\times 2\times 3\times 4+1=25=5^2$

$2\times 3\times 4\times 5+1=121=11^2$

$3\times 4\times 5\times 6+1=361=19^2$

Coïncidence ou pas ?