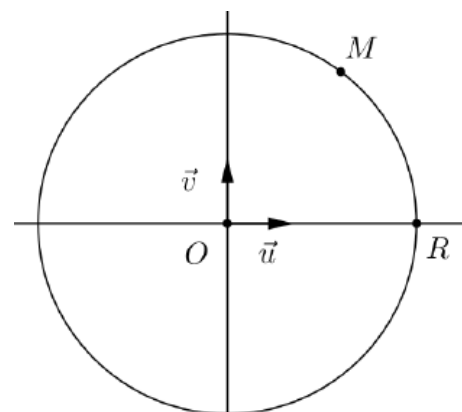


## Exercices BAC S

### Partie A

On note  $\mathbf{C}$  l'ensemble des nombres complexes.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  on a placé un point  $M$  d'affixe  $z$  appartenant à  $\mathbf{C}$  puis le point  $R$  intersection du cercle de centre  $O$  passant par  $M$  et du demi-axe  $[O; \vec{u})$ .

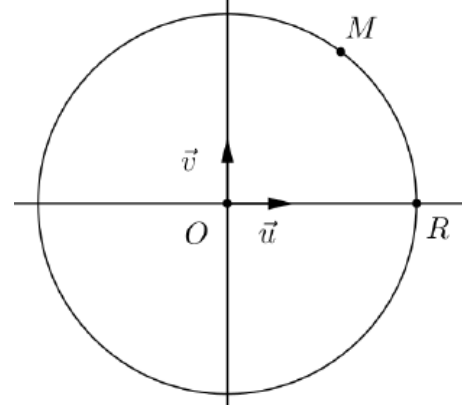


- 1) Exprimer l'affixe du point  $R$  en fonction de  $z$ .
- 2) Soit le point  $M'$  d'affixe définie par  $z' = \frac{1}{2} \left( \frac{z+|z|}{2} \right)$ .

Reproduire la figure sur la copie et construire le point  $M'$ .

### Partie B

On définit la suite de nombres complexes  $(z_n)$  par un premier terme  $z_0$  appartenant à  $\mathbf{C}$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par la relation de récurrence  $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}$ . Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite  $(|z_n|)$  dépend du choix de  $z_0$ .



- 1) Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite  $(|z_n|)$  quand  $z_0$  est un nombre réel négatif ?
- 2) Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite  $(|z_n|)$  quand  $z_0$  est un nombre réel positif ?
- 3) On suppose désormais que  $z_0$  n'est pas un nombre réel.
  - a. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite  $(|z_n|)$  ?
  - b. Démontrer cette conjecture, puis conclure.

Soit  $a$  un nombre réel fixé non nul.

### Partie C

Le but de cet exercice est d'étudier la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = a$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$ . On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire :  $u_{n+1} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$ .

- 1) Soit  $g$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :  $g(x) = e^{2x} - e^x - x$ .
  - a. Calculer  $g'(x)$  et prouver que, pour tout réel  $x$  :  $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$ .
  - b. Déterminer les variations de la fonction  $g$  et donner la valeur de son minimum.
  - c. En remarquant que  $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ , montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- 2) Dans cette question, on suppose que  $a \leq 0$ .
  - a. Que dire de la suite  $(u_n)$  lorsque  $a$  vaut 0 ?
  - b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq 0$ .
  - c. Dédire des questions précédentes que la suite  $(u_n)$  est convergente. On not  $\ell$  sa limite.
  - d. On admet que, lorsque la suite  $(u_n)$  a pour limite  $\ell$ , la suite  $(f(u_n))$  a pour limite  $f(\ell)$ . En déduire la valeur de  $\ell$ .
- 3) Dans cette question, on suppose que  $a > 0$ .

D'après la question 1), la suite  $(u_n)$  est croissante ; on a donc pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq a$ .

- a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$ .

- b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \geq a + n \times g(a)$ .
- c. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

4) Dans cette question, on prend  $a = 0,02$ .

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n > M$ , où  $M$  désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

<b>Variables</b>	$n$ est un entier, $u$ et $M$ sont deux réels
	$u$ prend la valeur 0,02
<b>Initialisation</b>	$n$ prend la valeur 0
	Saisir la valeur de $M$
<b>Traitement</b>	Tant que ...
	.....
	Fin tant que
<b>Sortie</b>	Afficher $n$

- a. Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.
- b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si  $M = 60$ .

Compétences de résolution de problèmes	Indicateurs	E	A	DA	NA
Chercher	1) A1 2) B3a 3) C3a 4) C4a 5) C4b	Les cinq indicateurs	Seulement quatre indicateurs	Seulement trois indicateurs	Moins de trois indicateurs
Calculer	1) A1 2) B1 3) B2 4) B3b 5) C1a 6) C1c 7) C2c	Six ou sept indicateurs	Quatre ou cinq indicateurs	Deux ou trois indicateurs	Moins de deux indicateurs
Raisonner	1) B1 2) B2 3) B3b 4) C1b 5) C1c 6) C2a 7) C2b 8) C2c 9) C3a 10) C3b 11) C3c	Dix ou onze indicateurs	De sept à neuf indicateurs	De quatre à six indicateurs	Moins de six indicateurs
Communiquer	1) B2 2) B3b 3) C2a 4) C2b 5) C3b	Les cinq indicateurs	Seulement quatre indicateurs	Seulement trois indicateurs	Moins de trois indicateurs
Représenter	1) A2 2) C1b	Trop peu pour évaluer	Trop peu pour évaluer	Trop peu pour évaluer	Trop peu pour évaluer

E : Expert - A : Acquis - DA : Début d'acquisition - NA : non acquis

Tout autre vocabulaire pour le positionnement étant possible.