Correction de la fiche diagnostique à l'entrée de la SPECIALITE Mathématiques de TERMINALE et à l'entrée de l'option Mathématiques COMPLEMENTAIRES

1. Capitalisation du cours :

• Une suite numérique u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
L'image de l'entier naturel n par la suite est noté u_n. On l'appelle terme d'indice n de la suite.
Cette suite est notée (u_n).

• Une suite peut être définie par une formule explicite, par récurrence, par un algorithme, par des motifs géométriques.

• Lorsqu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r, on dit que la suite (u_n) est **arithmétique**. Le nombre r est appelé la **raison** de la suite.

Dans ce cas, la suite est définie par la relation de récurrence : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$

et si le premier terme de la suite est u_0, le terme général est : $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$

Soit n un entier naturel non nul. On a $\boldsymbol{1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$

• Lorsqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre non nul q, on dit que la suite (u_n) est **géométrique**. Le nombre q est appelé la **raison** de la suite.

Dans ce cas, la suite est définie par la relation de récurrence : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n \times q}$

et si le premier terme de la suite est u_0, le terme général est : $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$

Soit n un entier naturel non nul et q un réel différent de 1. On a $\boldsymbol{1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

• Lorsque, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$, on dit que la suite (u_n) est **croissante**.
Lorsque, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$, on dit que la suite (u_n) est **décroissante**.

2. Calculer les termes d'une suite

• Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 - n + 4$.
Cette suite est **définie par une formule explicite.**

$\boldsymbol{u_0 = 3 \times 0^2 - 0 + 4 = 4}$

$\boldsymbol{u_1 = 3 \times 1^2 - 1 + 4 = 6}$

$\boldsymbol{u_2 = 3 \times 2^2 - 2 + 4 = 14}$

$\boldsymbol{u_3 = 3 \times 3^2 - 3 + 4 = 28}$

• Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 2v_n - 1 \end{cases}$

Cette suite est **définie par une relation de récurrence.**

$\boldsymbol{v_0 = 3}$

$\boldsymbol{v_1 = 2 \times v_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5}$

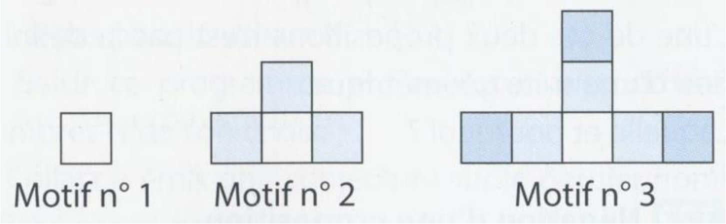
$\boldsymbol{v_2 = 2 \times v_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9}$

$\boldsymbol{v_3 = 2 \times v_2 - 1 = 2 \times 9 - 1 = 17}$

3. Modéliser une situation

a) On étudie l'action d'un antibiotique sur une souche de bactéries. Chaque heure, 3% des bactéries sont tuées. On note u_0 la quantité de bactéries au moment de l'injection et u_n la quantité de bactéries n heures après l'injection.
Diminuer un nombre de 3% revient à le multiplier par $1 - 0,03$ soit par 0,97.
Donc, la suite (u_n) est définie par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,97u_n$.

b) On construit une suite de motifs comme sur le schéma ci-dessous :



Le procédé de construction est le même pour les motifs suivants.
Pour tout entier $n \geq 1$, on note v_n le nombre de carrés du motif numéro n.
On passe d'un motif au suivant en ajoutant toujours 3 carrés.
Donc la suite (v_n) est définie par son premier terme $v_1 = 1$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = v_n + 3$.

c) Julie dispose dès sa naissance d'un livret contenant 100€.
A son premier anniversaire, ses grands-parents y déposent 50€, et chaque année, ils augmentent la somme déposée de 10€.
On note w_0 la somme sur le livret à la naissance et w_n la somme disponible sur le livret au $n^{\text{ième}}$ anniversaire. On suppose que Julie n'effectue aucun retrait.
Chaque année, à la somme de l'année précédente, on ajoute 50€ + 10€ multipliés par le nombre d'années -1. En effet :

- pour la 1ère année, on a : $w_1 = w_0 + 50 + 0 \times 10$.
- pour la 2ème année, on a : $w_2 = w_1 + 50 + 1 \times 10$.
- pour la 3ème année, on a : $w_3 = w_2 + 50 + 2 \times 10$.
- pour la 4ème année, on a : $w_4 = w_3 + 50 + 3 \times 10$.
- …

Donc la suite (w_n) est définie par son premier terme $w_0 = 100$ et par la relation de récurrence $w_{n+1} = w_n + 50 + n \times 10$.

d) Parmi les 3 suites précédentes, identifier les éventuelles suites arithmétiques et géométriques :
La suite (u_n) est géométrique de 1er terme u_0 et de raison 0,97.
La suite (v_n) est arithmétique de 1er terme 1 et de raison 3.

4. Manipuler une suite arithmétique

a) On considère la suite arithmétique (u_n) de 1er terme $u_1 = -3$ et de raison $r = 2$.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis calculer les cinq premiers termes de la suite.

La suite (u_n) est définie par son premier terme u_1 et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 2$

$u_1 = -3$

$u_2 = u_1 + 2 = -3 + 2 = -1$

$u_3 = u_2 + 2 = -1 + 2 = 1$

$u_4 = u_3 + 2 = 1 + 2 = 3$

$u_5 = u_4 + 2 = 3 + 2 = 5$

b) On considère la suite arithmétique (v_n) de 1er terme $v_0 = 1$ et de raison $= \frac{1}{3}$.
Exprimer v_n en fonction de n puis calculer v_{20}.

Le terme général de la suite (v_n) est $v_n = v_0 + nr = 1 + n \times \frac{1}{3}$.

D'où $v_{20} = 1 + 20 \times \frac{1}{3} = \frac{23}{3}$.

5. Manipuler une suite géométrique

a) On considère la suite géométrique (u_n) de 1er terme $u_1 = -3$ et de raison $q = 2$.
Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis calculer les cinq premiers termes de la suite.

La suite (u_n) est définie par son premier terme u_1 et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n \times 2$

$u_1 = -3$

$u_2 = u_1 \times 2 = -3 \times 2 = -6$

$u_3 = u_2 \times 2 = -6 \times 2 = -12$

$u_4 = u_3 \times 2 = -12 \times 2 = -24$

$u_5 = u_4 \times 2 = -24 \times 2 = -48$

b) On considère la suite géométrique (v_n) de 1er terme $v_0 = 1$ et de raison $= \frac{1}{3}$.
Exprimer v_n en fonction de n puis calculer v_{20}.

Le terme général de la suite (v_n) est $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

D'où $v_{20} = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{20} = \frac{1}{3^{20}}$.

6. Etudier le sens de variation

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 4 - (n+1)^2$.

a) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n :

$u_n = 4 - (n+1)^2 = 4 - (n^2 + 2n + 1) = -n^2 - 2n + 3$

$u_{n+1} = 4 - \left((n+1) + 1\right)^2 = 4 - (n+2)^2 = 4 - (n^2 + 4n + 4) = -n^2 - 4n$

On en déduit :

$u_{n+1} - u_n = -n^2 - 4n - -n^2 - 2n + 3 = -n^2 - 4n + n^2 + 2n - 3 = -2n - 3$

b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) :

Pour tout entier naturel n, on a $-2n - 3 < 0$.

Donc pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n < 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est donc strictement décroissante.