1)

Figure	I	$B/2$	$I + B/2$	Aire
$\mathcal{F}_1$	0	2	2	1
$\mathcal{F}_2$	0	2	2	1
$\mathcal{F}_3$	12	9	21	20
$\mathcal{F}_4$	7	6	13	12
$\mathcal{F}_5$	4	9	13	12
$\mathcal{F}_6$	6	14	20	19

Le calcul de la dernière aire vaut plus de points que le reste de la question.

e) Conjecture : $\mathcal{A} = I + \frac{B}{2} - 1$

2) a) $\mathcal{A} = \ell \times \mathrm{L}$

b) $I = (\ell - 1) \times (\mathrm{L}\text{-}1)$

c) $B = 2\ell + 2L$

d) $I + \frac{B}{2} - 1 = (\ell - 1)(L - 1) + \frac{2\ell + 2L}{2} - 1 = \ldots = \ell L = \mathcal{A}$

3) a) $\mathcal{A} = \frac{m \times n}{2}$

b) $B = m + n + k - 1$

c) Il faut prendre le nombre de points intérieurs au rectangle obtenu en « complétant » le triangle.
A ce nombre, on enlève les points entiers intérieurs au rectangle et se trouvant sur l'hypoténuse ; il y en a k-2.
On divise par 2 pour retrouver les points intérieurs au triangle.

$I = \frac{(m-1) \times (n-1) - (k-2)}{2}$

d) $I + \frac{B}{2} - 1 = \frac{(m-1) \times (n-1) - (k-2)}{2} + \frac{m + n + k - 1}{2} - 1 = \ldots = \frac{mn}{2} = \mathcal{A}$

4) a) $B_R = B_A + B_B + B_C - B_T$

b) $I_R = I_A + I_B + I_C + I_T + B_T - 3$

c) $\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_R - \mathcal{A}_A - \mathcal{A}_B - \mathcal{A}_C$

On applique ce que l'on a démontré aux questions 2 et 3 pour les rectangles et triangles rectangles particuliers :

$$\mathcal{A}_T = \left(I_R + \frac{B_R}{2} - 1\right) - \left(I_A + \frac{B_A}{2} - 1\right) - \left(I_B + \frac{B_B}{2} - 1\right) - \left(I_C + \frac{B_C}{2} - 1\right) = I_R - I_A - I_B - I_C + \frac{B_R - B_A - B_B - B_C}{2} + 2$$

$$\underset{\substack{\text{on remplace} \\ I_R \text{ et } B_R \text{ en} \\ \text{utilisant a) et b)}}}{=} \left(\cancel{I_A} + \cancel{I_B} + \cancel{I_C} + I_T + B_T - 3\right) - \cancel{I_A - I_B - I_C} + \frac{\left(\cancel{B_A + B_B + B_C} - B_T\right) - \cancel{B_A - B_B - B_C}}{2} + 2 = I_T + \frac{B_T}{2} - 1$$

On a démontré la conjecture.

5) Notons *F* le grand polygone (P+T). Utilisons les notations usuelles de cet exercice :
B_F, B_P, B_T, I_F, I_P, I_T, $\mathcal{A}_F$, $\mathcal{A}_P$ et $\mathcal{A}_T$.

On a $\mathcal{A}_F = \mathcal{A}_P + \mathcal{A}_T = I_P + \frac{B_P}{2} - 1 + I_T + \frac{B_T}{2} - 1 = I_P + I_T + \frac{B_P + B_T}{2} - 2$

Soit *k* le nombre de points entiers se trouvant sur le côté commun à P et T, sans côté les 2 sommets.

Alors $I_F = I_P + I_T + k$ et $B_F = B_P + B_T - 2k - 2$.

Donc $\mathcal{A}_F = I_F - k + \frac{B_F + 2k + 2}{2} - 2 = I_F + \frac{B_F}{2} - 1$.