MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE

Olympiades nationales de mathématiques 2020

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

Exercice national 1 (à traiter par tous les candidats)

Batailles navales

Bataille Navale. Éléments de correction

Partie A

1. **a)** 6 positions différentes. Il peut occuper une ligne (3 possibilités) ou une colonne (3 possibilités).

b) Plusieurs possibilités. Par exemple :

	×	
		×
×		

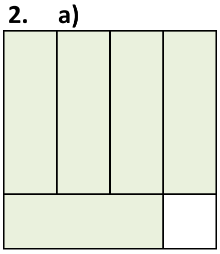
ou

×		
	×	
		×

c) Avec deux tirs on ne touche qu'une ou deux lignes (resp. colonnes). Un bateau placé sur une des lignes (resp colonnes) non touchées n'est pas atteint. On ne peut donc pas réaliser de jeu optimal avec deux tirs.

d) D'après c) $J(3) > 2$. D'après b) : $J(3) \leq 3$. Donc $J(3) = 3$.

2. **a)**



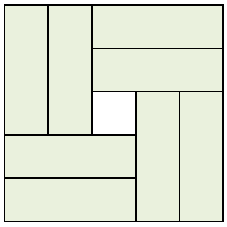
Il faut au moins 5 tirs pour toucher à coup sûr chacune de ces positions possibles du bateau. Donc $J(4) \geq 5$.

b) Par exemple :

	×		
		×	
×			×
	×		

Que le bateau soit sur une ligne (2 positions possibles par ligne) ou sur une colonne (2 positions possibles par colonne) il est touché par un des tirs représentés par des x ci-contre. Et on ne peut pas réaliser cela avec moins de 5 tirs cf a). Donc le jeu représenté est un jeu optimal et $J(4) = 5$

3. On peut placer le bateau sur l'une des huit positions deux à deux disjointes grisées ci- contre.
Un jeu optimal doit permettre de toucher le bateau dans toutes ces positions (et dans d'autres). Il faut au moins huit tirs, un au moins par zone grisée. Donc $J(5) \geq 8$



Que le bateau soit sur une ligne (3 positions possibles par ligne) ou sur une colonne (3 positions possibles par colonne) il est touché par un des tirs représentés par des x ci- contre.
Le jeu visualisé ci-contre permet donc à coup sûr de toucher le bateau, où qu'il soit.
Ce jeu comporte 8 tirs. Donc $J(5) \leq 8$.

		×		
		×		
×	×		×	×
		×		
		×		

$J(5) \geq 8$ et $J(5) \leq 8$ donc : $J(5) = 8$

Partie B

1. Cas $n = 3p$

a) On peut identifier sur chaque ligne (ou colonne) p blocs successifs de trois cases. Ceci sur $3p$ lignes (ou colonnes). Cela permet de recouvrir complètement le damier à l'aide de $3p^2$ blocs deux à deux disjoints de trois cases alignées. Il faut donc au moins $3p^2$ tirs pour espérer toucher le bateau, où qu'il se trouve.
Donc $J(3p) \geq 3p^2$.

b) et c) On considère le damier $n \times n$ comme une juxtaposition de p^2 damiers 3×3 cases. On place dans chacun de ces damiers les croix de la même façon, comme en A-1-b). On vérifie que sur chaque ligne les croix successives sont espacées de deux cases. Ce qui ne laisse pas de place à trois cases consécutives non atteintes par un tir. De même sur les colonnes

	×			×	
		×			×
×			×		
	×				
		×			
×					

Ce jeu permet donc de toucher le bateau où qu'il soit. Et il est composé de $3p^2$ tirs. D'après a), il n'existe pas de jeu comportant moins de tirs et permettant de toucher le bateau où qu'il soit. Donc ce jeu est optimal et $J(3p) = 3p^2$

2. Cas $n = 3p + 1$

a) Pour obtenir le damier $(3p+1)\times(3p+1)$ on complète le damier $3p\times 3p$ par une ligne de $3p+1$ cases en bas et une colonne de $3p$ cases à droite. A partir des $3p^2$ blocs successifs de trois cases déjà obtenus sur le damier $3p\times 3p$, on peut ajouter p blocs successifs de trois cases en position horizontale en bas et p blocs successifs de trois cases en position verticale à droite. Il reste une case non recouverte dans le coin. On obtient ainsi $3p^2+2p$ blocs successifs de trois cases deux à deux disjoints.

Donc $J(3p + 1) \geq 3p^2 + 2p$.

b) et c) Reprenant la grille du jeu optimal pour le cas $n=3p$, on complète par des croix comme dans A-2-b), sur la ligne rajoutée en bas et sur la colonne rajoutée à droite. On rajoute ainsi $2p$ croix aux $3p^2$ croix déjà placées. D'où un jeu de $3p^2 + 2p$. tirs qui permet de toucher à coup sûr le bateau. Il est optimal d'après a) et $J(3p + 1) = 3p^2 + 2p$

3.

a) Plusieurs démarches possibles. Par exemple :

dans tous les cas, $J(n)$ est un entier (par sa définition même).

<u>Si $n = 3p$</u> : $J(n) = 3p^2$ et $\frac{n^2}{3} = 3p^2$.

Donc , $J(n)$, qui est égal à $\frac{n^2}{3}$, est a fortiori inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$ et l'entier suivant, $J(n) + 1$est strictement supérieur à $\frac{n^2}{3}$. Donc $J(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.

Si $n = 3p + 1$: $J(n) = 3p^2 + 2p$ et $\frac{n^2}{3} = 3p^2 + 2p + \frac{1}{3}$. Donc , $J(n) < \frac{n^2}{3}$

Et $(n) + 1 = 3p^2 + 2p + 1$. Donc : $\frac{n^2}{3} < J(n) + 1$.

Donc $J(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.

Si $n = 3p + 2$: $J(n) = 3p^2 + 4p + 1$ et $\frac{n^2}{3} = 3p^2 + 4p + \frac{4}{3} = 3p^2 + 4p + 1 + \frac{1}{3}$. Donc , $J(n) < \frac{n^2}{3}$

Et $J(n) + 1 = 3p^2 + 4p + 2$. Donc : $\frac{n^2}{3} < J(n) + 1$.

Donc $J(n)$ est bien le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{3}$.

b) La réponse est non : En effet , $\frac{77^2}{3} < 1977 \quad 2028 = \frac{78^2}{3}$ donc $J(n) < 2020$ si $n \leq 77$ et $J(n) > 2020$ si $n \geq 78$.

Exercice national 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Ensembles surprenants

1. ***a.*** Soit $E = \{1, 2, 3, 2\,020\}$. $P(E) = 1 \times 2 \times 3 \times 2\,020 = 12\,120$
et $C(E) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2\,020^2 = 4\,080\,414$. Donc E n'est pas surprenant.
b. Soit $F = \{6, 15, 87\}$. $P(F) = 6 \times 15 \times 87 = 7\,830$ et $6^2 + 15^2 + 87^2 = 7\,830$. F est un ensemble surprenant.

2. ***a.*** L'égalité s'écrit aussi : $(x-1)(P(A) - 1 - x) = 0$. Il y a deux solutions, 1 et $P(A) - 1$.
b. Supposons que le nombre $P(A) - 1$ appartient à A. Il existe donc un entier k tel que $P(A) = k(P(A) - 1)$.
On peut encore écrire : $(k-1)P(A) = k$, ce qui implique que $k - 1$ divise k et donc $k = 2$ et finalement $P(A) = 2$, ce qui est exclu par l'énoncé.
c. Comme $A' = A \cup \{P(A) - 1\}$, on a : $P(A') = P(A) \times (P(A) - 1)$ et $C(A') = C(A) + (P(A) - 1)^2$.
On obtient $P(A') - C(A') = P(A) - C(A) - 1$.
d. En ajoutant un élément nouveau (bien choisi) à l'ensemble A, on obtient un nouvel ensemble pour lequel la différence entre le produit des éléments et la somme des carrés est diminuée de 1 par rapport à A. En opérant $n = P(A) - C(A)$ fois cet élargissement, on parvient à $A_n = B$ tel que $P(A_n) - C(A_n) = 0$, donc à un ensemble surprenant contenant A. Il n'y a pas de risque de rencontrer un élément déjà dans l'ensemble d'après **2.** ***b.***
e. Appliquons l'algorithme précédent à l'ensemble $G = \{3, 4, 9\}$

Éléments de l'ensemble	Leur produit *P*	La somme de leurs carrés	***P* −1**
$3, 4, 9$	108	106	107
$3,4,9,107$	$11\,556$	$11\,555$	$11\,555$
$3, 4, 9, 107, 11\,555$	$133\,529\,580$	$133\,529\,580$	

Comme dit plus haut, il a fallu deux opérations pour parvenir à un ensemble surprenant.

3. ***a.*** Supposons que le nombre $P(A) - 2$ appartienne à A. Il existe un entier k tel que $P(A) = k(P(A) - 2)$. Cette égalité s'écrit : $(k-1)P(A) = 2k$. On en conclut que $k - 1$ divise $2k$. Il s'ensuit que $k = 2$ ou $k = 3$ (*), ce qui donne les possibilités $P(A) = 4$ ou $P(A) = 3$, contrairement à l'hypothèse.
b. Comme dans la question précédente, nous adjoignons le nombre $P(A) - 2$ à l'ensemble A pour obtenir l'ensemble A_1. Pour toute partie finie X de $\mathbb{N}^*$, notons $f(X) = P(X) - C(X)$. On compare $f(A_1)$ et $f(A)$:

$$f(A_1) - f(A) = P(A)(P(A) - 2) - C(A) - (P(A) - 2)^2 - P(A) + C(A)$$

Ou encore : $f(A_1) - f(A) = P(A) + 4$.
En passant de A à A_1, la différence entre le produit des éléments et la somme de leurs carrés (qui est, au départ, négative, augmente). On poursuit le processus jusqu'à trouver par adjonction successive d'éléments (là encore il n'y a pas possibilité de redondance), un ensemble A_n tel que :
- ou bien $f(A_n) = 0$, auquel cas c'est terminé, A_n est surprenant ;
- ou bien $f(A_n) > 0$, et on est ramené à la situation de la question **2.** On sait comment continuer pour trouver un ensemble surprenant qui contienne tous ceux qui l'ont précédé dans le processus, dont A.

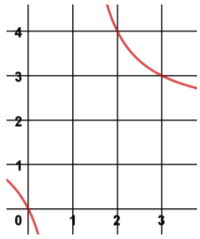
4. Il ne reste plus à examiner que les sous-ensembles finis non vides de **N*** dont le produit des éléments est strictement inférieur à 5. Pour chacun d'entre eux, on cherche un ensemble surprenant qui le contienne. On peut adjoindre à chacun le nombre 5, qui assure que le (nouveau) produit est supérieur à 5 et on se ramène aux cas précédents.

5. On a vu au début de l'énoncé que $P(A) = 10$ et $C(A) = 30$. On applique l'algorithme du **3.** ***b.***

Éléments de l'ensemble	Leur produit *P*	La somme de leurs carrés	***P* −2**
$1, 2, 5$	10	30	8
$1, 2, 5, 8$	80	94	78
$1, 2, 5, 8, 78$	$6\,240$	6178	

La différence $f(A_2)-f(A)$ est cette fois égale à 62 ; elle relève donc de l'algorithme du **2. *d.*** Avec cette méthode, on adjoint 62 éléments aux 5 de A_2. Cela en fait 67 (on ne saurait les écrire tous, le nombre de chiffres augmente très vite…)

(*) Si on ne veut pas utiliser l'arithmétique, il suffit de regarder les points à coordonnées entières positives de l'hyperbole $x \longmapsto \frac{2x}{x-1}$



Exercice national 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Mathématiques et cryptographie, une longue histoire !

1. *ROBPSLDGHV*
2. ANNEE DES MATHEMATIQUES
3. Chers amateurs de mathématiques,

Depuis ma naissance en *mille neuf cent douze*, ou presque, la cryptographie me passionne.
Vous utilisez le chiffre de césar pour lire ce message, le décodage est simpliste même si *Pythagore né au sixième siècle avant Jésus Christ* l'aurait trouvé brillant.
Alan Turing

4. Le rang de la lettre B est 1. $22 \times 1 + 4 = 26.$; le reste de la division euclidienne de 26 par 26 est 0 qui correspond à A.
5. Lettre D : $22 \times 3 + 4 = 70$ et $70 = 26 \times 2 + 18$. D est codée par S.

Lettre Q : $22 \times 16 + 4 = 356$ et $356 = 22 \times 16 + 4$. Q est aussi codée par S.
Ce codage n'est pas envisageable car deux lettres différentes sont codées par une même lettre, le décodage n'est donc pas unique.

6.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Rang x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$ax + b$	4	13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112
Rang y	4	13	22	5	14	23	6	15	24	7	16	25	8
En crypté	E	N	W	F	O	X	G	P	Y	H	Q	Z	I
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Numéro	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
ax + b	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202	211	220	229
Rang y	17	0	9	18	1	10	19	2	11	20	3	12	21
En crypté	R	A	J	S	B	K	T	C	L	U	D	M	V

b) La clé résout le problème évoqué à la question 5, car la dernière ligne contient des éléments distincts : deux lettres différentes sont codées différemment, rendant unique le décodage.

7. Le mot algorithme tire son origine de *Al-Khawarizmi, né en sept cent quatre-vingts*, père de l'algèbre.

8. Algorithme de décodage

N ← 0
Tant que N<26
M ← 3*N+14
Tant que M > 25

```
M ← M-26
Fin tant que
Afficher M
N ← N+1
Fin tant que
```

Ou

```
N ← 0
X ← 0

Tant que X<26
  M ← 9*X+4
  R  ← M%26
  Si R=N
    Afficher X.
  Fin si
Fin tant que
```

N

9. Dans ces deux types de codage, une lettre est toujours codée par une même autre lettre ce qui facilite le décodage, c'est un défaut …

10. *mille cinq cent vingt trois*

11.