Décimaux relatifs en classe de 5^{e}

P. Arzoumanian[2] M. Bovani[1] A. Diger[2] D. Petit[2]

[1]Académie de Limoges

[2]Académie d'Orléans-Tours

Décembre 2004

Étendre la soustraction

Les futurs programmes proposent de « rendre la soustraction toujours possible ».

- Il s'agit d'une situation *interne* aux mathématiques.
- On dispose de l'ensemble $\mathscr{D}$ des décimaux naturels, muni d'une opération, l'addition, associative, commutative et admettant 0 pour élément neutre (en termes savants $(\mathscr{D}, +)$ est un *monoïde commutatif*).
- On veut compléter cet ensemble $\mathscr{D}$ en un ensemble $\mathbb{D}$ sur lequel l'addition se prolonge de telle façon que $(\mathbb{D}, +)$ soit un groupe (existence d'un opposé, ou soustraction partout définie).

On peut alors adopter différents points de vue :

- La construction aujourd'hui classique par passage au quotient.
- L'utilisation du principe de permanence, dont une version simplifiée peut se résumer à Les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer dans $\mathbb{D}$.

Étendre la soustraction

Les futurs programmes proposent de « rendre la soustraction toujours possible ».

- Il s'agit d'une situation *interne* aux mathématiques.
- On dispose de l'ensemble $\mathscr{D}$ des décimaux naturels, muni d'une opération, l'addition, associative, commutative et admettant 0 pour élément neutre (en termes savants $(\mathscr{D}, +)$ est un *monoïde commutatif*).
- On veut compléter cet ensemble $\mathscr{D}$ en un ensemble $\mathbb{D}$ sur lequel l'addition se prolonge de telle façon que $(\mathbb{D}, +)$ soit un groupe (existence d'un opposé, ou soustraction partout définie).

On peut alors adopter différents points de vue :

- La construction aujourd'hui classique par passage au quotient.
- L'utilisation du principe de permanence, dont une version simplifiée peut se résumer à Les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer dans $\mathbb{D}$.

Étendre la soustraction

Les futurs programmes proposent de « rendre la soustraction toujours possible ».

- Il s'agit d'une situation *interne* aux mathématiques.
- On dispose de l'ensemble $\mathscr{D}$ des décimaux naturels, muni d'une opération, l'addition, associative, commutative et admettant 0 pour élément neutre (en termes savants $(\mathscr{D}, +)$ est un *monoïde commutatif*).
- On veut compléter cet ensemble $\mathscr{D}$ en un ensemble $\mathbb{D}$ sur lequel l'addition se prolonge de telle façon que $(\mathbb{D}, +)$ soit un groupe (existence d'un opposé, ou soustraction partout définie).

On peut alors adopter différents points de vue :

- La construction aujourd'hui classique par passage au quotient.
- L'utilisation du principe de permanence, dont une version simplifiée peut se résumer à Les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer dans $\mathbb{D}$.

Étendre la soustraction

Les futurs programmes proposent de « rendre la soustraction toujours possible ».

- Il s'agit d'une situation *interne* aux mathématiques.
- On dispose de l'ensemble $\mathscr{D}$ des décimaux naturels, muni d'une opération, l'addition, associative, commutative et admettant 0 pour élément neutre (en termes savants $(\mathscr{D}, +)$ est un *monoïde commutatif*).
- On veut compléter cet ensemble $\mathscr{D}$ en un ensemble $\mathbb{D}$ sur lequel l'addition se prolonge de telle façon que $(\mathbb{D}, +)$ soit un groupe (existence d'un opposé, ou soustraction partout définie).

On peut alors adopter différents points de vue :

- La construction aujourd'hui classique par passage au quotient.
- L'utilisation du principe de permanence, dont une version simplifiée peut se résumer à Les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer dans $\mathbb{D}$.

Étendre la soustraction

Les futurs programmes proposent de « rendre la soustraction toujours possible ».

- Il s'agit d'une situation *interne* aux mathématiques.
- On dispose de l'ensemble $\mathscr{D}$ des décimaux naturels, muni d'une opération, l'addition, associative, commutative et admettant 0 pour élément neutre (en termes savants $(\mathscr{D},+)$ est un *monoïde commutatif*).
- On veut compléter cet ensemble $\mathscr{D}$ en un ensemble $\mathbb{D}$ sur lequel l'addition se prolonge de telle façon que $(\mathbb{D},+)$ soit un groupe (existence d'un opposé, ou soustraction partout définie).

On peut alors adopter différents points de vue :

- La construction aujourd'hui classique par passage au quotient.
- L'utilisation du principe de permanence, dont une version simplifiée peut se résumer à Les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer dans $\mathbb{D}$.

En classe de cinquième

Que peut-on dire en classe de 5e de la différence 3,7 − 10,8 ?
Si l'on s'impose que les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer on peut écrire :

Posons	$3{,}7 - 10{,}8 = d$	Usage de la lettre
alors	$d + 10{,}8 = 3{,}7$	Différence
et	$d + 10{,}8 - 3{,}7 = 3{,}7 - 3{,}7$	Substitution
soit	$d + 7{,}1 = 0$	
finalement	$d = 0 - 7{,}1$	Différence

À ce stade on remarque que :

- Savoir calculer 3,7 − 10,8 se ramène à savoir calculer 0 − 7,1.
- Notre problème se ramène au calcul d'une différence du type $0 - x, x \in \mathscr{D}$.

On décide alors de noter

$$d = -7{,}1\,.$$

En classe de cinquième

Que peut-on dire en classe de 5^{e} de la différence $3{,}7 - 10{,}8$?

Si l'on s'impose que les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer on peut écrire :

Posons	$3{,}7 - 10{,}8 = d$	Usage de la lettre
alors	$d + 10{,}8 = 3{,}7$	Différence
et	$d + 10{,}8 - 3{,}7 = 3{,}7 - 3{,}7$	Substitution
soit	$d + 7{,}1 = 0$	
finalement	$d = 0 - 7{,}1$	Différence

À ce stade on remarque que :

- Savoir calculer $3{,}7 - 10{,}8$ se ramène à savoir calculer $0 - 7{,}1$.
- Notre problème se ramène au calcul d'une différence du type $0 - x, x \in \mathscr{D}$.

On décide alors de noter

$$d = -7{,}1\,.$$

En classe de cinquième

Que peut-on dire en classe de 5^{e} de la différence $3{,}7 - 10{,}8$?
Si l'on s'impose que les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer on peut écrire :

Posons	$3{,}7 - 10{,}8 = d$	Usage de la lettre
alors	$d + 10{,}8 = 3{,}7$	Différence
et	$d + 10{,}8 - 3{,}7 = 3{,}7 - 3{,}7$	Substitution
soit	$d + 7{,}1 = 0$	
finalement	$d = 0 - 7{,}1$	Différence

À ce stade on remarque que :

- Savoir calculer $3{,}7 - 10{,}8$ se ramène à savoir calculer $0 - 7{,}1$.
- Notre problème se ramène au calcul d'une différence du type $0 - x, x \in \mathscr{D}$.

On décide alors de noter

$$d = -7{,}1\,.$$

En classe de cinquième

Que peut-on dire en classe de 5^{e} de la différence $3{,}7 - 10{,}8$?
Si l'on s'impose que les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer on peut écrire :

Posons	$3{,}7 - 10{,}8 = d$	Usage de la lettre
alors	$d + 10{,}8 = 3{,}7$	Différence
et	$d + 10{,}8 - 3{,}7 = 3{,}7 - 3{,}7$	Substitution
soit	$d + 7{,}1 = 0$	
finalement	$d = 0 - 7{,}1$	Différence

À ce stade on remarque que :

- Savoir calculer $3{,}7 - 10{,}8$ se ramène à savoir calculer $0 - 7{,}1$.
- Notre problème se ramène au calcul d'une différence du type $0 - x, x \in \mathscr{D}$.

On décide alors de noter

$$d = -7{,}1 .$$

En classe de cinquième

Que peut-on dire en classe de 5^{e} de la différence $3{,}7-10{,}8$?
Si l'on s'impose que les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer on peut écrire :

Posons	$3{,}7-10{,}8=d$	Usage de la lettre
alors	$d+10{,}8=3{,}7$	Différence
et	$d+10{,}8-3{,}7=3{,}7-3{,}7$	Substitution
soit	$d+7{,}1=0$	
finalement	$d=0-7{,}1$	Différence

À ce stade on remarque que :

- Savoir calculer $3{,}7-10{,}8$ se ramène à savoir calculer $0-7{,}1$.
- Notre problème se ramène au calcul d'une différence du type $0-x, x\in\mathscr{D}$.

On décide alors de noter

$$d=-7{,}1\ .$$

En classe de cinquième

Que peut-on dire en classe de 5^{e} de la différence $3{,}7-10{,}8$?
Si l'on s'impose que les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer on peut écrire :

Posons	$3{,}7-10{,}8=d$	Usage de la lettre
alors	$d+10{,}8=3{,}7$	Différence
et	$d+10{,}8-3{,}7=3{,}7-3{,}7$	Substitution
soit	$d+7{,}1=0$	
finalement	$d=0-7{,}1$	Différence

À ce stade on remarque que :

- Savoir calculer $3{,}7-10{,}8$ se ramène à savoir calculer $0-7{,}1$.
- Notre problème se ramène au calcul d'une différence du type $0-x, x\in\mathscr{D}$.

On décide alors de noter

$$d=-7{,}1\,.$$

En classe de cinquième

Que peut-on dire en classe de 5^{e} de la différence $3{,}7 - 10{,}8$?
Si l'on s'impose que les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer on peut écrire :

Posons	$3{,}7 - 10{,}8 = d$	Usage de la lettre
alors	$d + 10{,}8 = 3{,}7$	Différence
et	$d + 10{,}8 - 3{,}7 = 3{,}7 - 3{,}7$	Substitution
soit	$d + 7{,}1 = 0$	
finalement	$d = 0 - 7{,}1$	Différence

À ce stade on remarque que :

- Savoir calculer $3{,}7 - 10{,}8$ se ramène à savoir calculer $0 - 7{,}1$.
- Notre problème se ramène au calcul d'une différence du type $0 - x, x \in \mathscr{D}$.

On décide alors de noter

$$d = -7{,}1 .$$

En classe de cinquième

Que peut-on dire en classe de 5^{e} de la différence $3{,}7 - 10{,}8$?
Si l'on s'impose que les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer on peut écrire :

Posons	$3{,}7 - 10{,}8 = d$	Usage de la lettre
alors	$d + 10{,}8 = 3{,}7$	Différence
et	$d + 10{,}8 - 3{,}7 = 3{,}7 - 3{,}7$	Substitution
soit	$d + 7{,}1 = 0$	
finalement	$d = 0 - 7{,}1$	Différence

À ce stade on remarque que :

- Savoir calculer $3{,}7 - 10{,}8$ se ramène à savoir calculer $0 - 7{,}1$.
- Notre problème se ramène au calcul d'une différence du type $0 - x, x \in \mathscr{D}$.

On décide alors de noter

$$d = -7{,}1\,.$$

En classe de cinquième

Que peut-on dire en classe de 5[e] de la différence $3{,}7 - 10{,}8$?
Si l'on s'impose que les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer on peut écrire :

Posons	$3{,}7 - 10{,}8 = d$	Usage de la lettre
alors	$d + 10{,}8 = 3{,}7$	Différence
et	$d + 10{,}8 - 3{,}7 = 3{,}7 - 3{,}7$	Substitution
soit	$d + 7{,}1 = 0$	
finalement	$d = 0 - 7{,}1$	Différence

À ce stade on remarque que :

- Savoir calculer $3{,}7 - 10{,}8$ se ramène à savoir calculer $0 - 7{,}1$.
- Notre problème se ramène au calcul d'une différence du type $0 - x, x \in \mathscr{D}$.

On décide alors de noter

$$d = -7{,}1 .$$

En classe de cinquième

Que peut-on dire en classe de 5^{e} de la différence $3{,}7-10{,}8$?
Si l'on s'impose que les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer on peut écrire :

Posons	$3{,}7-10{,}8=d$	Usage de la lettre
alors	$d+10{,}8=3{,}7$	Différence
et	$d+10{,}8-3{,}7=3{,}7-3{,}7$	Substitution
soit	$d+7{,}1=0$	
finalement	$d=0-7{,}1$	Différence

À ce stade on remarque que :

- Savoir calculer $3{,}7-10{,}8$ se ramène à savoir calculer $0-7{,}1$.
- Notre problème se ramène au calcul d'une différence du type $0-x, x \in \mathscr{D}$.

On décide alors de noter

$$d=-7{,}1\,.$$

En classe de cinquième

Que peut-on dire en classe de 5^{e} de la différence $3{,}7 - 10{,}8$?
Si l'on s'impose que les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer on peut écrire :

Posons	$3{,}7 - 10{,}8 = d$	Usage de la lettre
alors	$d + 10{,}8 = 3{,}7$	Différence
et	$d + 10{,}8 - 3{,}7 = 3{,}7 - 3{,}7$	Substitution
soit	$d + 7{,}1 = 0$	
finalement	$d = 0 - 7{,}1$	Différence

À ce stade on remarque que :

- Savoir calculer $3{,}7 - 10{,}8$ se ramène à savoir calculer $0 - 7{,}1$.
- Notre problème se ramène au calcul d'une différence du type $0 - x, x \in \mathscr{D}$.

On décide alors de noter

$$d = -7{,}1 .$$

En classe de cinquième

Que peut-on dire en classe de 5^{e} de la différence 3,7 − 10,8 ?
Si l'on s'impose que les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer on peut écrire :

Posons	$3{,}7 - 10{,}8 = d$	Usage de la lettre
alors	$d + 10{,}8 = 3{,}7$	Différence
et	$d + 10{,}8 - 3{,}7 = 3{,}7 - 3{,}7$	Substitution
soit	$d + 7{,}1 = 0$	
finalement	$d = 0 - 7{,}1$	Différence

À ce stade on remarque que :

- Savoir calculer $3{,}7 - 10{,}8$ se ramène à savoir calculer $0 - 7{,}1$.
- Notre problème se ramène au calcul d'une différence du type $0 - x, x \in \mathscr{D}$.

On décide alors de noter

$$d = -7{,}1 \,.$$

En classe de cinquième

Que peut-on dire en classe de 5^{e} de la différence $3{,}7 - 10{,}8$?
Si l'on s'impose que les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer on peut écrire :

Posons	$3{,}7 - 10{,}8 = d$	Usage de la lettre
alors	$d + 10{,}8 = 3{,}7$	Différence
et	$d + 10{,}8 - 3{,}7 = 3{,}7 - 3{,}7$	Substitution
soit	$d + 7{,}1 = 0$	
finalement	$d = 0 - 7{,}1$	Différence

À ce stade on remarque que :

- Savoir calculer $3{,}7 - 10{,}8$ se ramène à savoir calculer $0 - 7{,}1$.
- Notre problème se ramène au calcul d'une différence du type $0 - x, x \in \mathscr{D}$.

On décide alors de noter

$$d = -7{,}1 \,.$$

En classe de cinquième

Que peut-on dire en classe de 5^{e} de la différence 3,7 – 10,8 ?
Si l'on s'impose que les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer on peut écrire :

Posons	$3{,}7 - 10{,}8 = d$	Usage de la lettre
alors	$d + 10{,}8 = 3{,}7$	Différence
et	$d + 10{,}8 - 3{,}7 = 3{,}7 - 3{,}7$	Substitution
soit	$d + 7{,}1 = 0$	
finalement	$d = 0 - 7{,}1$	Différence

À ce stade on remarque que :

- Savoir calculer 3,7 – 10,8 se ramène à savoir calculer 0 – 7,1.
- Notre problème se ramène au calcul d'une différence du type $0 - x, x \in \mathscr{D}$.

On décide alors de noter

$$d = -7{,}1\,.$$

En classe de cinquième

Que peut-on dire en classe de 5^{e} de la différence $3{,}7 - 10{,}8$?
Si l'on s'impose que les règles de calcul connues dans $\mathscr{D}$ doivent continuer à s'appliquer on peut écrire :

Posons	$3{,}7 - 10{,}8 = d$	Usage de la lettre
alors	$d + 10{,}8 = 3{,}7$	Différence
et	$d + 10{,}8 - 3{,}7 = 3{,}7 - 3{,}7$	Substitution
soit	$d + 7{,}1 = 0$	
finalement	$d = 0 - 7{,}1$	Différence

À ce stade on remarque que :

- Savoir calculer $3{,}7 - 10{,}8$ se ramène à savoir calculer $0 - 7{,}1$.
- Notre problème se ramène au calcul d'une différence du type $0 - x, x \in \mathscr{D}$.

On décide alors de noter

$$d = -7{,}1\ .$$

Remarques

- Même si les raisonnements proposés sont relativement simples, ils restent à la charge du professeur : il s'agit clairement d'une situation magistrale.
- La situation de départ doit être problématisée (programme de calcul).
- Un certain nombre de prérequis apparaissent.
- On peut éventuellement formaliser un peu plus en énonçant : *pour deux décimaux naturels a et b tels que $a < b$, la différence entre a et b est égale à la différence entre* 0 *et* $b - a$.
- Quelques gammes d'exercices concernant le calcul de la différence de deux décimaux naturels quelconques sont d'ores et déjà possibles.
- Le travail n'est évidemment pas terminé : nous disposons maintenant de l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux relatifs, il reste à étendre à cet ensemble les opérations de $\mathscr{D}$, à définir l'opposé, à introduire la représentation des décimaux relatifs sur un axe gradué, à aborder au moins succintement l'ordre dans $\mathbb{D}$.

Remarques

- Même si les raisonnements proposés sont relativement simples, ils restent à la charge du professeur : il s'agit clairement d'une situation magistrale.
- La situation de départ doit être problématisée (programme de calcul).
- Un certain nombre de prérequis apparaissent.
- On peut éventuellement formaliser un peu plus en énonçant : *pour deux décimaux naturels a et b tels que $a < b$, la différence entre a et b est égale à la différence entre* 0 *et* $b - a$.
- Quelques gammes d'exercices concernant le calcul de la différence de deux décimaux naturels quelconques sont d'ores et déjà possibles.
- Le travail n'est évidemment pas terminé : nous disposons maintenant de l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux relatifs, il reste à étendre à cet ensemble les opérations de $\mathscr{D}$, à définir l'opposé, à introduire la représentation des décimaux relatifs sur un axe gradué, à aborder au moins succintement l'ordre dans $\mathbb{D}$.

Remarques

- Même si les raisonnements proposés sont relativement simples, ils restent à la charge du professeur : il s'agit clairement d'une situation magistrale.
- La situation de départ doit être problématisée (programme de calcul).
- Un certain nombre de prérequis apparaissent.
- On peut éventuellement formaliser un peu plus en énonçant : *pour deux décimaux naturels a et b tels que $a < b$, la différence entre a et b est égale à la différence entre* 0 *et $b - a$.*
- Quelques gammes d'exercices concernant le calcul de la différence de deux décimaux naturels quelconques sont d'ores et déjà possibles.
- Le travail n'est évidemment pas terminé : nous disposons maintenant de l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux relatifs, il reste à étendre à cet ensemble les opérations de $\mathscr{D}$, à définir l'opposé, à introduire la représentation des décimaux relatifs sur un axe gradué, à aborder au moins succintement l'ordre dans $\mathbb{D}$.

Remarques

- Même si les raisonnements proposés sont relativement simples, ils restent à la charge du professeur : il s'agit clairement d'une situation magistrale.
- La situation de départ doit être problématisée (programme de calcul).
- Un certain nombre de prérequis apparaissent.
- On peut éventuellement formaliser un peu plus en énonçant : *pour deux décimaux naturels a et b tels que $a < b$, la différence entre a et b est égale à la différence entre* 0 *et* $b - a$.
- Quelques gammes d'exercices concernant le calcul de la différence de deux décimaux naturels quelconques sont d'ores et déjà possibles.
- Le travail n'est évidemment pas terminé : nous disposons maintenant de l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux relatifs, il reste à étendre à cet ensemble les opérations de $\mathscr{D}$, à définir l'opposé, à introduire la représentation des décimaux relatifs sur un axe gradué, à aborder au moins succintement l'ordre dans $\mathbb{D}$.

Remarques

- Même si les raisonnements proposés sont relativement simples, ils restent à la charge du professeur : il s'agit clairement d'une situation magistrale.
- La situation de départ doit être problématisée (programme de calcul).
- Un certain nombre de prérequis apparaissent.
- On peut éventuellement formaliser un peu plus en énonçant : *pour deux décimaux naturels a et b tels que $a < b$, la différence entre a et b est égale à la différence entre* 0 *et $b - a$.*
- Quelques gammes d'exercices concernant le calcul de la différence de deux décimaux naturels quelconques sont d'ores et déjà possibles.
- Le travail n'est évidemment pas terminé : nous disposons maintenant de l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux relatifs, il reste à étendre à cet ensemble les opérations de $\mathscr{D}$, à définir l'opposé, à introduire la représentation des décimaux relatifs sur un axe gradué, à aborder au moins succintement l'ordre dans $\mathbb{D}$.

Remarques

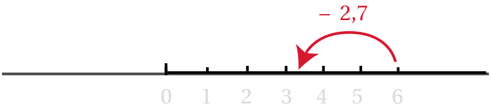
- Même si les raisonnements proposés sont relativement simples, ils restent à la charge du professeur : il s'agit clairement d'une situation magistrale.
- La situation de départ doit être problématisée (programme de calcul).
- Un certain nombre de prérequis apparaissent.
- On peut éventuellement formaliser un peu plus en énonçant : *pour deux décimaux naturels a et b tels que $a < b$, la différence entre a et b est égale à la différence entre* 0 *et* $b - a$.
- Quelques gammes d'exercices concernant le calcul de la différence de deux décimaux naturels quelconques sont d'ores et déjà possibles.
- Le travail n'est évidemment pas terminé : nous disposons maintenant de l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux relatifs, il reste à étendre à cet ensemble les opérations de $\mathscr{D}$, à définir l'opposé, à introduire la représentation des décimaux relatifs sur un axe gradué, à aborder au moins succintement l'ordre dans $\mathbb{D}$.

Représentation et distance à zéro

1. On sait interpréter sur un demi axe gradué la soustraction de 2,7 (par exemple) à un autre décimal naturel comme un déplacement d'amplitude 2,7 vers la gauche.
2. On en déduit (principe de permanence) le placement de $-2,7$ $(0-2,7)$ et la représentation des décimaux relatifs par un axe.
3. On définit la distance à zéro.

Représentation et distance à zéro

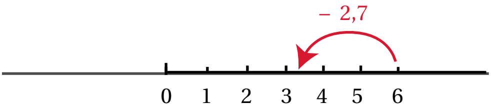
1. On sait interpréter sur un demi axe gradué la soustraction de 2,7 (par exemple) à un autre décimal naturel comme un déplacement d'amplitude 2,7 vers la gauche.
2. On en déduit (principe de permanence) le placement de $-2{,}7$ $(0-2{,}7)$ et la représentation des décimaux relatifs par un axe.



3. On définit la distance à zéro.

Représentation et distance à zéro

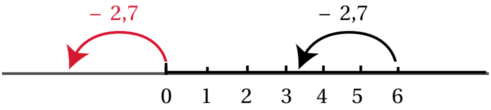
1. On sait interpréter sur un demi axe gradué la soustraction de 2,7 (par exemple) à un autre décimal naturel comme un déplacement d'amplitude 2,7 vers la gauche.
2. On en déduit (principe de permanence) le placement de $-2{,}7$ $(0-2{,}7)$ et la représentation des décimaux relatifs par un axe.



3. On définit la distance à zéro.

Représentation et distance à zéro

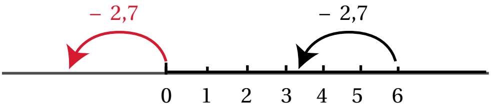
1. On sait interpréter sur un demi axe gradué la soustraction de 2,7 (par exemple) à un autre décimal naturel comme un déplacement d'amplitude 2,7 vers la gauche.
2. On en déduit (principe de permanence) le placement de $-2{,}7$ $(0-2{,}7)$ et la représentation des décimaux relatifs par un axe.



3. On définit la distance à zéro.

Représentation et distance à zéro

1. On sait interpréter sur un demi axe gradué la soustraction de 2,7 (par exemple) à un autre décimal naturel comme un déplacement d'amplitude 2,7 vers la gauche.
2. On en déduit (principe de permanence) le placement de $-2{,}7$ $(0 - 2{,}7)$ et la représentation des décimaux relatifs par un axe.



3. On définit la distance à zéro.

Signe et opposé

1. On définit le signe d'un décimal relatif non nul et l'on introduit les notations (+4) et (−4) comme des alternatives parfois utiles.
2. On convient de dire que deux nombres comme 4 et −4 sont opposés (ils ont la même distance à zéro et des signes différents). On dira aussi que −4 (par exemple) est l'opposé de 4, et que 4 est l'opposé de −4, et que zéro est son propre opposé.
3. On montre que si deux nombres sont opposés leur somme est nulle.

	ou	
$0-4=-4$	$0-(+4)=(-4)$	
$-4+4=0$	$(-4)+(+4)=0$	différence
$4+(-4)=0$	$(+4)+(-4)=0$	commutativité

Signe et opposé

1. On définit le signe d'un décimal relatif non nul et l'on introduit les notations $(+4)$ et (-4) comme des alternatives parfois utiles.
2. On convient de dire que deux nombres comme 4 et -4 sont opposés (ils ont la même distance à zéro et des signes différents). On dira aussi que -4 (par exemple) est l'opposé de 4, et que 4 est l'opposé de -4, et que zéro est son propre opposé.
3. On montre que si deux nombres sont opposés leur somme est nulle.

	ou	
$0-4=-4$	$0-(+4)=(-4)$	
$-4+4=0$	$(-4)+(+4)=0$	différence
$4+(-4)=0$	$(+4)+(-4)=0$	commutativité

Signe et opposé

1. On définit le signe d'un décimal relatif non nul et l'on introduit les notations $(+4)$ et (-4) comme des alternatives parfois utiles.
2. On convient de dire que deux nombres comme 4 et -4 sont opposés (ils ont la même distance à zéro et des signes différents). On dira aussi que -4 (par exemple) est l'opposé de 4, et que 4 est l'opposé de -4, et que zéro est son propre opposé.
3. On montre que si deux nombres sont opposés leur somme est nulle.

	ou	
$0-4=-4$	$0-(+4)=(-4)$	
$-4+4=0$	$(-4)+(+4)=0$	différence
$4+(-4)=0$	$(+4)+(-4)=0$	commutativité

Signe et opposé

1. On définit le signe d'un décimal relatif non nul et l'on introduit les notations $(+4)$ et (-4) comme des alternatives parfois utiles.
2. On convient de dire que deux nombres comme 4 et -4 sont opposés (ils ont la même distance à zéro et des signes différents). On dira aussi que -4 (par exemple) est l'opposé de 4, et que 4 est l'opposé de -4, et que zéro est son propre opposé.
3. On montre que si deux nombres sont opposés leur somme est nulle.

	ou	
$0-4=-4$	$0-(+4)=(-4)$	
$-4+4=0$	$(-4)+(+4)=0$	différence
$4+(-4)=0$	$(+4)+(-4)=0$	commutativité

Signe et opposé

1. On définit le signe d'un décimal relatif non nul et l'on introduit les notations $(+4)$ et (-4) comme des alternatives parfois utiles.
2. On convient de dire que deux nombres comme 4 et -4 sont opposés (ils ont la même distance à zéro et des signes différents). On dira aussi que -4 (par exemple) est l'opposé de 4, et que 4 est l'opposé de -4, et que zéro est son propre opposé.
3. On montre que si deux nombres sont opposés leur somme est nulle.

	ou	
$0-4=-4$	$0-(+4)=(-4)$	
$-4+4=0$	$(-4)+(+4)=0$	différence
$4+(-4)=0$	$(+4)+(-4)=0$	commutativité

Signe et opposé

1. On définit le signe d'un décimal relatif non nul et l'on introduit les notations $(+4)$ et (-4) comme des alternatives parfois utiles.
2. On convient de dire que deux nombres comme 4 et -4 sont opposés (ils ont la même distance à zéro et des signes différents). On dira aussi que -4 (par exemple) est l'opposé de 4, et que 4 est l'opposé de -4, et que zéro est son propre opposé.
3. On montre que si deux nombres sont opposés leur somme est nulle.

	ou	
$0-4=-4$	$0-(+4)=(-4)$	
$-4+4=0$	$(-4)+(+4)=0$	différence
$4+(-4)=0$	$(+4)+(-4)=0$	commutativité

Construction de l'addition dans $\mathbb{D}$

$s = (-8) + (+12)$	$s = (-8) + (+5)$	
$(+8) + s = (+8) + (-8) + (+12)$	$(+8) + s = (+8) + (-8) + (+5)$	(substitution)
$(+8) + s = (+12)$	$(+8) + s = (+5)$	
$s = (+12) - (+8)$	$s = (+5) - (+8)$	(différence)
$s = (+4)$	$s = (-3)$	

$s = (-8) + (-5)$	
$(+5) + (+8) + s = (+5) + (+8) + (-8) + (-5)$	(substitution)
$(+13) + s = 0$	
$s = (-13)$	(différence ou opposé)
$s = -13$	

Construction de l'addition dans $\mathbb{D}$

$s = (-8) + (+12)$	$s = (-8) + (+5)$	
$(+8) + s = (+8) + (-8) + (+12)$	$(+8) + s = (+8) + (-8) + (+5)$	(substitution)
$(+8) + s = (+12)$	$(+8) + s = (+5)$	
$s = (+12) - (+8)$	$s = (+5) - (+8)$	(différence)
$s = (+4)$	$s = (-3)$	

$s = (-8) + (-5)$	
$(+5) + (+8) + s = (+5) + (+8) + (-8) + (-5)$	(substitution)
$(+13) + s = 0$	
$s = (-13)$	(différence ou opposé)
$s = -13$	

Construction de l'addition dans $\mathbb{D}$

$s = (-8) + (+12)$	$s = (-8) + (+5)$	
$(+8) + s = (+8) + (-8) + (+12)$	$(+8) + s = (+8) + (-8) + (+5)$	(substitution)
$(+8) + s = (+12)$	$(+8) + s = (+5)$	
$s = (+12) - (+8)$	$s = (+5) - (+8)$	(différence)
$s = (+4)$	$s = (-3)$	

$s = (-8) + (-5)$	
$(+5) + (+8) + s = (+5) + (+8) + (-8) + (-5)$	(substitution)
$(+13) + s = 0$	
$s = (-13)$	(différence ou opposé)
$s = -13$	

Construction de l'addition dans $\mathbb{D}$

$s = (-8) + (+12)$

$(+8) + s = (+8) + (-8) + (+12)$

$(+8) + s = (+12)$

$s = (+12) - (+8)$

$s = (+4)$

$s = (-8) + (+5)$

$(+8) + s = (+8) + (-8) + (+5)$ (substitution)

$(+8) + s = (+5)$

$s = (+5) - (+8)$ (différence)

$s = (-3)$

$s = (-8) + (-5)$

$(+5) + (+8) + s = (+5) + (+8) + (-8) + (-5)$ (substitution)

$(+13) + s = 0$

$s = (-13)$ (différence ou opposé)

$s = -13$

Construction de l'addition dans $\mathbb{D}$

$s = (-8) + (+12)$	$s = (-8) + (+5)$	
$(+8) + s = (+8) + (-8) + (+12)$	$(+8) + s = (+8) + (-8) + (+5)$	(substitution)
$(+8) + s = (+12)$	$(+8) + s = (+5)$	
$s = (+12) - (+8)$	$s = (+5) - (+8)$	(différence)
$s = (+4)$	$s = (-3)$	

$s = (-8) + (-5)$

$(+5) + (+8) + s = (+5) + (+8) + (-8) + (-5)$ (substitution)

$(+13) + s = 0$

$s = (-13)$ (différence ou opposé)

$s = -13$

Construction de l'addition dans $\mathbb{D}$

$s = (-8) + (+12)$	$s = (-8) + (+5)$	
$(+8) + s = (+8) + (-8) + (+12)$	$(+8) + s = (+8) + (-8) + (+5)$	(substitution)
$(+8) + s = (+12)$	$(+8) + s = (+5)$	
$s = (+12) - (+8)$	$s = (+5) - (+8)$	(différence)
$s = (+4)$	$s = (-3)$	

$s = (-8) + (-5)$

$(+5) + (+8) + s = (+5) + (+8) + (-8) + (-5)$ (substitution)

$(+13) + s = 0$

$s = (-13)$ (différence ou opposé)

$s = -13$

Construction de l'addition dans $\mathbb{D}$

$$
\begin{aligned}
&s = (-8) + (+12) \\
&(+8) + s = (+8) + (-8) + (+12) \\
&(+8) + s = (+12) \\
&s = (+12) - (+8) \\
&s = (+4)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&s = (-8) + (+5) && \\
&(+8) + s = (+8) + (-8) + (+5) && \text{(substitution)} \\
&(+8) + s = (+5) && \\
&s = (+5) - (+8) && \text{(différence)} \\
&s = (-3) &&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&s = (-8) + (-5) && \\
&(+5) + (+8) + s = (+5) + (+8) + (-8) + (-5) && \text{(substitution)} \\
&(+13) + s = 0 && \\
&s = (-13) && \text{(différence ou opposé)} \\
&s = -13 &&
\end{aligned}
$$

Construction de l'addition dans $\mathbb{D}$

$$\begin{aligned}
s &= (-8)+(+12) \\
(+8)+s &= (+8)+(-8)+(+12) \\
(+8)+s &= (+12) \\
s &= (+12)-(+8) \\
s &= (+4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s &= (-8)+(+5) \\
(+8)+s &= (+8)+(-8)+(+5) && \text{(substitution)} \\
(+8)+s &= (+5) \\
s &= (+5)-(+8) && \text{(différence)} \\
s &= (-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s &= (-8)+(-5) \\
(+5)+(+8)+s &= (+5)+(+8)+(-8)+(-5) && \text{(substitution)} \\
(+13)+s &= 0 \\
s &= (-13) && \text{(différence ou opposé)} \\
s &= -13
\end{aligned}$$

Addition dans $\mathbb{D}$ (institutionnalisation)

On formule une règle d'action.

- *La somme de deux nombres de même signe a :*
  - *le même signe que ces deux nombres ;*
  - *une distance à* 0 *égale à la somme des distances à* 0 *de ces deux nombres.*
- *La somme de deux nombres de signes différents a :*
  - *le même signe que celui des deux nombres qui a la plus grande distance à* 0 *;*
  - *une distance à* 0 *égale à la différence des distances à* 0 *de ces deux nombres.*

Remarque : il resterait mathématiquement à vérifier que l'opération ainsi construite répond bien aux contraintes posées *a priori*. Cette vérification est didactiquement difficile à envisager.

Addition dans $\mathbb{D}$ (institutionnalisation)

On formule une règle d'action.

- *La somme de deux nombres de même signe a :*
  - *le même signe que ces deux nombres ;*
  - *une distance à* 0 *égale à la somme des distances à* 0 *de ces deux nombres.*
- *La somme de deux nombres de signes différents a :*
  - *le même signe que celui des deux nombres qui a la plus grande distance à* 0 *;*
  - *une distance à* 0 *égale à la différence des distances à* 0 *de ces deux nombres.*

Remarque : il resterait mathématiquement à vérifier que l'opération ainsi construite répond bien aux contraintes posées *a priori*. Cette vérification est didactiquement difficile à envisager.

Addition dans $\mathbb{D}$ (institutionnalisation)

On formule une règle d'action.

- *La somme de deux nombres de même signe a :*
  - *le même signe que ces deux nombres ;*
  - *une distance à* 0 *égale à la somme des distances à* 0 *de ces deux nombres.*
- *La somme de deux nombres de signes différents a :*
  - *le même signe que celui des deux nombres qui a la plus grande distance à* 0 *;*
  - *une distance à* 0 *égale à la différence des distances à* 0 *de ces deux nombres.*

Remarque : il resterait mathématiquement à vérifier que l'opération ainsi construite répond bien aux contraintes posées *a priori*. Cette vérification est didactiquement difficile à envisager.

Addition dans $\mathbb{D}$ (institutionnalisation)

On formule une règle d'action.

- *La somme de deux nombres de même signe a :*
  - *le même signe que ces deux nombres ;*
  - *une distance à* 0 *égale à la somme des distances à* 0 *de ces deux nombres.*
- *La somme de deux nombres de signes différents a :*
  - *le même signe que celui des deux nombres qui a la plus grande distance à* 0 *;*
  - *une distance à* 0 *égale à la différence des distances à* 0 *de ces deux nombres.*

Remarque : il resterait mathématiquement à vérifier que l'opération ainsi construite répond bien aux contraintes posées *a priori*. Cette vérification est didactiquement difficile à envisager.

Opposé (institutionnalisation)

On donne une définition.
Définition : *Deux nombres non nuls sont opposés s'ils ont la même distance à zéro et des signes différents.*

Une notation : l'opposé de x est noté $\text{opp}(x)$. Par exemple $\text{opp}(-4) = 4$ et $\text{opp}(0) = 0$.

Une propriété et sa réciproque.
Propriété : *La somme de deux nombres opposés est nulle.*
Réciproque : *Si la somme de deux nombres est nulle, alors ces deux nombres sont opposés.*

Opposé (institutionnalisation)

On donne une définition.
Définition : *Deux nombres non nuls sont opposés s'ils ont la même distance à zéro et des signes différents.*

Une notation : l'opposé de x est noté $\text{opp}(x)$. Par exemple $\text{opp}(-4) = 4$ et $\text{opp}(0) = 0$.

Une propriété et sa réciproque.
Propriété : *La somme de deux nombres opposés est nulle.*
Réciproque : *Si la somme de deux nombres est nulle, alors ces deux nombres sont opposés.*

Opposé (institutionnalisation)

On donne une définition.
Définition : *Deux nombres non nuls sont opposés s'ils ont la même distance à zéro et des signes différents.*

Une notation : l'opposé de x est noté $\mathrm{opp}(x)$. Par exemple $\mathrm{opp}(-4) = 4$ et $\mathrm{opp}(0) = 0$.

Une propriété et sa réciproque.
Propriété : *La somme de deux nombres opposés est nulle.*
Réciproque : *Si la somme de deux nombres est nulle, alors ces deux nombres sont opposés.*

Opposé (institutionnalisation)

On donne une définition.
Définition : *Deux nombres non nuls sont opposés s'ils ont la même distance à zéro et des signes différents.*

Une notation : l'opposé de x est noté $\mathrm{opp}(x)$. Par exemple $\mathrm{opp}(-4) = 4$ et $\mathrm{opp}(0) = 0$.

Une propriété et sa réciproque.
Propriété : *La somme de deux nombres opposés est nulle.*
Réciproque : *Si la somme de deux nombres est nulle, alors ces deux nombres sont opposés.*

Soustraction dans $\mathbb{D}$

Soient a et b deux décimaux relatifs. Posons

$$d = a - b$$

alors

$$d + b = a$$
$$d + b + \text{opp}(b) = a + \text{opp}(b)$$
$$d + 0 = a + \text{opp}(b)$$
$$d = a + \text{opp}(b)$$

et finalement

$$a - b = a + \text{opp}(b)$$

Soustraction dans $\mathbb{D}$

Soient a et b deux décimaux relatifs. Posons

$$d = a - b$$

alors

$$d + b = a$$
$$d + b + \text{opp}(b) = a + \text{opp}(b)$$
$$d + 0 = a + \text{opp}(b)$$
$$d = a + \text{opp}(b)$$

et finalement

$$a - b = a + \text{opp}(b)$$

Soustraction dans $\mathbb{D}$

Soient a et b deux décimaux relatifs. Posons

$$d = a - b$$

alors

$$d + b = a$$
$$d + b + \text{opp}(b) = a + \text{opp}(b)$$
$$d + 0 = a + \text{opp}(b)$$
$$d = a + \text{opp}(b)$$

et finalement

$$a - b = a + \text{opp}(b)$$

Soustraction dans $\mathbb{D}$

Soient a et b deux décimaux relatifs. Posons

$$d = a - b$$

alors

$$\begin{aligned}
d + b &= a \\
d + b + \mathrm{opp}(b) &= a + \mathrm{opp}(b) \\
d + 0 &= a + \mathrm{opp}(b) \\
d &= a + \mathrm{opp}(b)
\end{aligned}$$

et finalement

$$a - b = a + \mathrm{opp}(b)$$

Soustraction dans $\mathbb{D}$

Soient a et b deux décimaux relatifs. Posons

$$d = a - b$$

alors

$$\begin{aligned}
d + b &= a \\
d + b + \mathrm{opp}(b) &= a + \mathrm{opp}(b) \\
d + 0 &= a + \mathrm{opp}(b) \\
d &= a + \mathrm{opp}(b)
\end{aligned}$$

et finalement

$$a - b = a + \mathrm{opp}(b)$$

Et pour finir

On peut alors insister sur le triple statut du signe – : signe d'un nombre, opposé d'un nombre, soustraction.

Cela permet de voir $7-11$ comme la somme de 7 et de -11 ou comme la différence de 7 et 11. et justifie des calculs comme

$$3{,}2-7{,}7+11{,}7-0{,}2=3{,}2-0{,}2+11{,}7-7{,}7=3-4=-1\,.$$

FIN

Et pour finir

On peut alors insister sur le triple statut du signe – : signe d'un nombre, opposé d'un nombre, soustraction.

Cela permet de voir $7-11$ comme la somme de 7 et de -11 ou comme la différence de 7 et 11. et justifie des calculs comme

$$3{,}2-7{,}7+11{,}7-0{,}2=3{,}2-0,2+11{,}7-7{,}7=3-4=-1\,.$$

FIN

Et pour finir

On peut alors insister sur le triple statut du signe – : signe d'un nombre, opposé d'un nombre, soustraction.

Cela permet de voir $7-11$ comme la somme de 7 et de -11 ou comme la différence de 7 et 11. et justifie des calculs comme

$$3{,}2-7{,}7+11{,}7-0{,}2=3{,}2-0,2+11{,}7-7{,}7=3-4=-1\,.$$

FIN

Une construction de $\mathbb{D}$

- Dans $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$ on définit une addition par $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.
- On définit une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ par

$$(x, y)\mathscr{R}(x', y') \iff x + y' = x' + y.$$

- On montre que $\mathscr{R}$ est compatible avec l'addition, qui passe ainsi au quotient.
- On montre que le quotient $\mathbb{D}$ est un groupe abélien.
- En particulier

$$\widetilde{(x, y)} = \begin{cases} \widetilde{(x-y, 0)} & \text{si } x \geqslant y \\ \widetilde{(0, y-x)} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\widetilde{(x, y)} + \widetilde{(y, x)} = \widetilde{(0, 0)}$$

- On plonge $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{D}$ grâce au morphisme injectif de monoïdes ϕ :

$$\phi : \mathscr{D} \to \mathbb{D}; x \mapsto \widetilde{(x, 0)}.$$

Une construction de $\mathbb{D}$

- Dans $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$ on définit une addition par $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.
- On définit une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ par

$$(x, y)\mathscr{R}(x', y') \iff x + y' = x' + y\,.$$

- On montre que $\mathscr{R}$ est compatible avec l'addition, qui passe ainsi au quotient.
- On montre que le quotient $\mathbb{D}$ est un groupe abélien.
- En particulier

$$\widetilde{(x, y)} = \begin{cases} \widetilde{(x - y, 0)} & \text{si } x \geqslant y \\ \widetilde{(0, y - x)} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\widetilde{(x, y)} + \widetilde{(y, x)} = \widetilde{(0, 0)}$$

- On plonge $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{D}$ grâce au morphisme injectif de monoïdes ϕ :

$$\phi : \mathscr{D} \to \mathbb{D}; x \mapsto \widetilde{(x, 0)}\,.$$

Une construction de $\mathbb{D}$

- Dans $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$ on définit une addition par $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.
- On définit une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ par

$$(x, y)\mathscr{R}(x', y') \iff x + y' = x' + y\,.$$

- On montre que $\mathscr{R}$ est compatible avec l'addition, qui passe ainsi au quotient.
- On montre que le quotient $\mathbb{D}$ est un groupe abélien.
- En particulier

$$\widetilde{(x,y)} = \begin{cases} \widetilde{(x-y,0)} & \text{si } x \geqslant y \\ \widetilde{(0,y-x)} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\widetilde{(x,y)} + \widetilde{(y,x)} = \widetilde{(0,0)}$$

- On plonge $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{D}$ grâce au morphisme injectif de monoïdes ϕ :

$$\phi : \mathscr{D} \to \mathbb{D}; x \mapsto \widetilde{(x,0)}\,.$$

Une construction de $\mathbb{D}$

- Dans $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$ on définit une addition par $(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$.
- On définit une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ par

$$(x,y)\mathscr{R}(x',y') \iff x+y' = x'+y\,.$$

- On montre que $\mathscr{R}$ est compatible avec l'addition, qui passe ainsi au quotient.
- On montre que le quotient $\mathbb{D}$ est un groupe abélien.
- En particulier

$$\widetilde{(x,y)} = \begin{cases} \widetilde{(x-y,0)} & \text{si } x \geqslant y \\ \widetilde{(0,y-x)} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\widetilde{(x,y)} + \widetilde{(y,x)} = \widetilde{(0,0)}$$

- On plonge $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{D}$ grâce au morphisme injectif de monoïdes ϕ :

$$\phi : \mathscr{D} \to \mathbb{D}; x \mapsto \widetilde{(x,0)}\,.$$

Une construction de $\mathbb{D}$

- Dans $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$ on définit une addition par $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$.
- On définit une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ par

$$(x,y)\mathscr{R}(x',y') \iff x+y'=x'+y.$$

- On montre que $\mathscr{R}$ est compatible avec l'addition, qui passe ainsi au quotient.
- On montre que le quotient $\mathbb{D}$ est un groupe abélien.
- En particulier

$$\widetilde{(x,y)} = \begin{cases} \widetilde{(x-y,0)} & \text{si } x \geqslant y \\ \widetilde{(0,y-x)} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\widetilde{(x,y)} + \widetilde{(y,x)} = \widetilde{(0,0)}$$

- On plonge $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{D}$ grâce au morphisme injectif de monoïdes ϕ :

$$\phi : \mathscr{D} \to \mathbb{D}; x \mapsto \widetilde{(x,0)}.$$

Une construction de $\mathbb{D}$

- Dans $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$ on définit une addition par $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$.
- On définit une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ par

$$(x,y)\mathscr{R}(x',y') \iff x+y'=x'+y\,.$$

- On montre que $\mathscr{R}$ est compatible avec l'addition, qui passe ainsi au quotient.
- On montre que le quotient $\mathbb{D}$ est un groupe abélien.
- En particulier

$$\widetilde{(x,y)} = \begin{cases} \widetilde{(x-y,0)} & \text{si } x \geqslant y \\ \widetilde{(0,y-x)} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\widetilde{(x,y)} + \widetilde{(y,x)} = \widetilde{(0,0)}$$

- On plonge $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{D}$ grâce au morphisme injectif de monoïdes ϕ :

$$\phi : \mathscr{D} \to \mathbb{D}; x \mapsto \widetilde{(x,0)}\,.$$

Une construction de $\mathbb{D}$

- Dans $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$ on définit une addition par $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$.
- On définit une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ par

$$(x,y)\mathscr{R}(x',y') \iff x+y'=x'+y.$$

- On montre que $\mathscr{R}$ est compatible avec l'addition, qui passe ainsi au quotient.
- On montre que le quotient $\mathbb{D}$ est un groupe abélien.
- En particulier

$$\widetilde{(x,y)} = \begin{cases} \widetilde{(x-y,0)} & \text{si } x \geqslant y \\ \widetilde{(0,y-x)} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\widetilde{(x,y)} + \widetilde{(y,x)} = \widetilde{(0,0)}$$

- On plonge $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{D}$ grâce au morphisme injectif de monoïdes ϕ :

$$\phi : \mathscr{D} \to \mathbb{D}; x \mapsto \widetilde{(x,0)}.$$

Prérequis : Usage de la lettre comme outils de preuve

Les deux grands objectifs sont :

- Organiser un moment de première rencontre avec la lettre en tant que nombre généralisé.
- Introduire le calcul littéral comme un élément indispensable à l'élaboration de certaines preuves.

« Fais fonctionner chacun des deux programmes de calcul ci-dessous en choisissant le nombre 1, puis le nombre 2, puis le nombre 3, puis le nombre 4. »

1. Observe les résultats obtenus.
2. Quelle propriété générale peut-on conjecturer ?
3. Cette conjecture est-elle vraie ou fausse ?
4. Prouve le.

Prérequis : Usage de la lettre comme outils de preuve

Les deux grands objectifs sont :

- Organiser un moment de première rencontre avec la lettre en tant que nombre généralisé.
- Introduire le calcul littéral comme un élément indispensable à l'élaboration de certaines preuves.

« Fais fonctionner chacun des deux programmes de calcul ci-dessous en choisissant le nombre 1, puis le nombre 2, puis le nombre 3, puis le nombre 4. »

1. Observe les résultats obtenus.
2. Quelle propriété générale peut-on conjecturer ?
3. Cette conjecture est-elle vraie ou fausse ?
4. Prouve le.

Prérequis : Usage de la lettre comme outils de preuve

Les deux grands objectifs sont :

- Organiser un moment de première rencontre avec la lettre en tant que nombre généralisé.
- Introduire le calcul littéral comme un élément indispensable à l'élaboration de certaines preuves.

« Fais fonctionner chacun des deux programmes de calcul ci-dessous en choisissant le nombre 1, puis le nombre 2, puis le nombre 3, puis le nombre 4. »

1. Observe les résultats obtenus.
2. Quelle propriété générale peut-on conjecturer ?
3. Cette conjecture est-elle vraie ou fausse ?
4. Prouve le.

Prérequis : Usage de la lettre comme outils de preuve

Les deux grands objectifs sont :

- Organiser un moment de première rencontre avec la lettre en tant que nombre généralisé.
- Introduire le calcul littéral comme un élément indispensable à l'élaboration de certaines preuves.

« Fais fonctionner chacun des deux programmes de calcul ci-dessous en choisissant le nombre 1, puis le nombre 2, puis le nombre 3, puis le nombre 4. »

1. Observe les résultats obtenus.
2. Quelle propriété générale peut-on conjecturer ?
3. Cette conjecture est-elle vraie ou fausse ?
4. Prouve le.

Prérequis : Usage de la lettre comme outils de preuve

Les deux grands objectifs sont :

- Organiser un moment de première rencontre avec la lettre en tant que nombre généralisé.
- Introduire le calcul littéral comme un élément indispensable à l'élaboration de certaines preuves.

« Fais fonctionner chacun des deux programmes de calcul ci-dessous en choisissant le nombre 1, puis le nombre 2, puis le nombre 3, puis le nombre 4. »

1. Observe les résultats obtenus.
2. Quelle propriété générale peut-on conjecturer ?
3. Cette conjecture est-elle vraie ou fausse ?
4. Prouve le.

Prérequis : Usage de la lettre comme outils de preuve

Les deux grands objectifs sont :

- Organiser un moment de première rencontre avec la lettre en tant que nombre généralisé.
- Introduire le calcul littéral comme un élément indispensable à l'élaboration de certaines preuves.

« Fais fonctionner chacun des deux programmes de calcul ci-dessous en choisissant le nombre 1, puis le nombre 2, puis le nombre 3, puis le nombre 4. »

1. Observe les résultats obtenus.
2. Quelle propriété générale peut-on conjecturer ?
3. Cette conjecture est-elle vraie ou fausse ?
4. Prouve le.

Usage de la lettre (suite)

Programme 1

1. Choisir un nombre
2. Multiplier ce nombre par lui-même
3. Ajouter 35
4. Soustraire le décuple du nombre choisi
5. Multiplier par le nombre choisi
6. Multiplier par le nombre choisi
7. Ajouter 24
8. Soustraire le produit de 49 par le nombre choisi

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+x$$

Programme 2

1. Choisir un nombre
2. Le multiplier par 0,25
3. Ajouter 0,5
4. Multiplier par 4
5. Soustraire 2

$$\begin{aligned} f(x) &= (x \times 0{,}25 + 0{,}5) \times 4 - 2 \\ &= x \end{aligned}$$

Usage de la lettre (suite)

Programme 1

1. Choisir un nombre
2. Multiplier ce nombre par lui-même
3. Ajouter 35
4. Soustraire le décuple du nombre choisi
5. Multiplier par le nombre choisi
6. Multiplier par le nombre choisi
7. Ajouter 24
8. Soustraire le produit de 49 par le nombre choisi

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+x$$

Programme 2

1. Choisir un nombre
2. Le multiplier par 0,25
3. Ajouter 0,5
4. Multiplier par 4
5. Soustraire 2

$$\begin{aligned} f(x) &= (x \times 0{,}25 + 0{,}5) \times 4 - 2 \\ &= x \end{aligned}$$

Usage de la lettre (suite)

Programme 1

1. Choisir un nombre
2. Multiplier ce nombre par lui-même
3. Ajouter 35
4. Soustraire le décuple du nombre choisi
5. Multiplier par le nombre choisi
6. Multiplier par le nombre choisi
7. Ajouter 24
8. Soustraire le produit de 49 par le nombre choisi

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+x$$

Programme 2

1. Choisir un nombre
2. Le multiplier par 0,25
3. Ajouter 0,5
4. Multiplier par 4
5. Soustraire 2

$$\begin{aligned} f(x) &= (x \times 0{,}25 + 0{,}5) \times 4 - 2 \\ &= x \end{aligned}$$

Usage de la lettre (suite)

Programme 1

1. Choisir un nombre
2. Multiplier ce nombre par lui-même
3. Ajouter 35
4. Soustraire le décuple du nombre choisi
5. Multiplier par le nombre choisi
6. Multiplier par le nombre choisi
7. Ajouter 24
8. Soustraire le produit de 49 par le nombre choisi

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + x$$

Programme 2

1. Choisir un nombre
2. Le multiplier par 0,25
3. Ajouter 0,5
4. Multiplier par 4
5. Soustraire 2

$$\begin{aligned} f(x) &= (x \times 0{,}25 + 0{,}5) \times 4 - 2 \\ &= x \end{aligned}$$

Usage de la lettre (suite)

Programme 1

1. Choisir un nombre
2. Multiplier ce nombre par lui-même
3. Ajouter 35
4. Soustraire le décuple du nombre choisi
5. Multiplier par le nombre choisi
6. Multiplier par le nombre choisi
7. Ajouter 24
8. Soustraire le produit de 49 par le nombre choisi

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+x$$

Programme 2

1. Choisir un nombre
2. Le multiplier par 0,25
3. Ajouter 0,5
4. Multiplier par 4
5. Soustraire 2

$$\begin{aligned} f(x) &= (x \times 0{,}25 + 0{,}5) \times 4 - 2 \\ &= x \end{aligned}$$

Usage de la lettre (suite)

Programme 1

1. Choisir un nombre
2. Multiplier ce nombre par lui-même
3. Ajouter 35
4. Soustraire le décuple du nombre choisi
5. Multiplier par le nombre choisi
6. Multiplier par le nombre choisi
7. Ajouter 24
8. Soustraire le produit de 49 par le nombre choisi

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + x$$

Programme 2

1. Choisir un nombre
2. Le multiplier par 0,25
3. Ajouter 0,5
4. Multiplier par 4
5. Soustraire 2

$$f(x) = (x \times 0{,}25 + 0{,}5) \times 4 - 2$$
$$= x$$

Usage de la lettre (suite)

Programme 1

1. Choisir un nombre
2. Multiplier ce nombre par lui-même
3. Ajouter 35
4. Soustraire le décuple du nombre choisi
5. Multiplier par le nombre choisi
6. Multiplier par le nombre choisi
7. Ajouter 24
8. Soustraire le produit de 49 par le nombre choisi

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + x$$

Programme 2

1. Choisir un nombre
2. Le multiplier par 0,25
3. Ajouter 0,5
4. Multiplier par 4
5. Soustraire 2

$$\begin{aligned} f(x) &= (x \times 0{,}25 + 0{,}5) \times 4 - 2 \\ &= x \end{aligned}$$

Prérequis : caractérisation de la différence

Le calcul mental permet de travailler dans ce sens

$$27 + x = 42 \qquad x = ?$$
$$200 - y = 51 \qquad y = ?$$
$$z - 12 = 68 \qquad z = ?$$

etc.

Prérequis : caractérisation de la différence

Le calcul mental permet de travailler dans ce sens

$$27 + x = 42 \qquad x = ?$$
$$200 - y = 51 \qquad y = ?$$
$$z - 12 = 68 \qquad z = ?$$

etc.

Prérequis : caractérisation de la différence

Le calcul mental permet de travailler dans ce sens

$$\begin{aligned} 27 + x &= 42 & \qquad x &= \ ? \\ 200 - y &= 51 & y &= \ ? \\ z - 12 &= 68 & z &= \ ? \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Prérequis : substitution

$$\begin{aligned} \text{Si } a = b + 3 \text{alors} a + 2 &= b + \dots \\ a + 6 &= b + \dots \\ a - 3 &= b + \dots \end{aligned}$$

Et en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$\text{Si } 15(a+b) = 525 \text{ et } 15a = 285 \text{ alors } 15b = \dots$$

Prérequis : substitution

$$\text{Si } a = b + 3 \text{alors} a + 2 = b + \ldots$$
$$a + 6 = b + \ldots$$
$$a - 3 = b + \ldots$$

Et en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$\text{Si } 15(a+b) = 525 \text{ et } 15a = 285 \text{ alors } 15b = \ldots$$

Prérequis : substitution

$$\begin{aligned} \text{Si } a = b + 3 \text{alors} a + 2 &= b + \ldots \\ a + 6 &= b + \ldots \\ a - 3 &= b + \ldots \end{aligned}$$

Et en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

$$\text{Si } 15(a+b) = 525 \text{ et } 15a = 285 \text{ alors } 15b = \ldots$$

Problématiser la situation de départ

On peut par exemple travailler avec un progamme de calcul qui applique $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{D}$, mais en passant éventuellement dans $\mathbb{D}$.

Programme 1

1. Choisir un nombre ;
2. lui retrancher 5,927 ;
3. ajouter au résultat le double de la somme de 3,344 et du nombre choisi.

Programme 2

1. Choisir un nombre ;
2. le multiplier par 3 ;
3. ajouter 0,763 au résultat obtenu.

Les deux programmes sont équivalents dans $\mathbb{D}$, mais le premier ne fonctionne pas toujours dans $\mathscr{D}$.
La calculatrice ou le tableur permettent de faire apparaître des décimaux négatifs.

Problématiser la situation de départ

On peut par exemple travailler avec un progamme de calcul qui applique $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{D}$, mais en passant éventuellement dans $\mathbb{D}$.

Programme 1

1. Choisir un nombre ;
2. lui retrancher 5,927 ;
3. ajouter au résultat le double de la somme de 3,344 et du nombre choisi.

Programme 2

1. Choisir un nombre ;
2. le multiplier par 3 ;
3. ajouter 0,763 au résultat obtenu.

Les deux programmes sont équivalents dans $\mathbb{D}$, mais le premier ne fonctionne pas toujours dans $\mathscr{D}$.
La calculatrice ou le tableur permettent de faire apparaître des décimaux négatifs.

Problématiser la situation de départ

On peut par exemple travailler avec un progamme de calcul qui applique $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{D}$, mais en passant éventuellement dans $\mathbb{D}$.

Programme 1

1. Choisir un nombre ;
2. lui retrancher 5,927 ;
3. ajouter au résultat le double de la somme de 3,344 et du nombre choisi.

Programme 2

1. Choisir un nombre ;
2. le multiplier par 3 ;
3. ajouter 0,763 au résultat obtenu.

Les deux programmes sont équivalents dans $\mathbb{D}$, mais le premier ne fonctionne pas toujours dans $\mathscr{D}$.
La calculatrice ou le tableur permettent de faire apparaître des décimaux négatifs.

Problématiser la situation de départ

On peut par exemple travailler avec un progamme de calcul qui applique $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{D}$, mais en passant éventuellement dans $\mathbb{D}$.

Programme 1

1. Choisir un nombre ;
2. lui retrancher 5,927 ;
3. ajouter au résultat le double de la somme de 3,344 et du nombre choisi.

Programme 2

1. Choisir un nombre ;
2. le multiplier par 3 ;
3. ajouter 0,763 au résultat obtenu.

Les deux programmes sont équivalents dans $\mathbb{D}$, mais le premier ne fonctionne pas toujours dans $\mathscr{D}$.
La calculatrice ou le tableur permettent de faire apparaître des décimaux négatifs.

Problématiser la situation de départ

On peut par exemple travailler avec un progamme de calcul qui applique $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{D}$, mais en passant éventuellement dans $\mathbb{D}$.

Programme 1

1. Choisir un nombre ;
2. lui retrancher 5,927 ;
3. ajouter au résultat le double de la somme de 3,344 et du nombre choisi.

Programme 2

1. Choisir un nombre ;
2. le multiplier par 3 ;
3. ajouter 0,763 au résultat obtenu.

Les deux programmes sont équivalents dans $\mathbb{D}$, mais le premier ne fonctionne pas toujours dans $\mathscr{D}$.

La calculatrice ou le tableur permettent de faire apparaître des décimaux négatifs.

Problématiser la situation de départ

On peut par exemple travailler avec un progamme de calcul qui applique $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{D}$, mais en passant éventuellement dans $\mathbb{D}$.

Programme 1

1. Choisir un nombre ;
2. lui retrancher 5,927 ;
3. ajouter au résultat le double de la somme de 3,344 et du nombre choisi.

Programme 2

1. Choisir un nombre ;
2. le multiplier par 3 ;
3. ajouter 0,763 au résultat obtenu.

Les deux programmes sont équivalents dans $\mathbb{D}$, mais le premier ne fonctionne pas toujours dans $\mathscr{D}$.
La calculatrice ou le tableur permettent de faire apparaître des décimaux négatifs.