Fiche élève :

Une décomposition additive de 13, c'est par exemple 4+5+2+1+1. Si on fait le produit des termes de cette décomposition, on obtient $4\times5\times2\times1\times1=40$. En choisissant une autre décomposition additive, on obtient un autre produit.

Cherchez parmi les décompositions additives du nombre 10 , celle dont le produit des termes est le plus grand.

Recommencer votre travail avec le nombre 14 puis avec le nombre 16.

Chercher une méthode générale qui vous permettrait d'obtenir le plus grand produit avec n'importe quel nombre choisi au départ.

Fiche professeur :

L'expérience est menée avec peu de nombres (pour que les élèves puissent se décentrer des calculs) situés dans un champ numérique limité car les produits deviennent vite grands et les calculs seraient hasardeux au delà.

Les objectifs spécifiques de la démarche sont :

- émettre des hypothèses,
- formuler précisément des propositions pour pouvoir en débattre,
- prouver une proposition.

La première phase consiste en une recherche individuelle pour 10 puis 14 (et éventuellement 16). Ensuite vient l'analyse des solutions produites en prenant dans l'ordre les décompositions additives :

- erronées (celles dont la somme des termes est différente du nombre donné au départ),
- les moins pertinentes (p. ex. celle qui contient des 1),
- les meilleures (sans se prononcer sur le fait qu'il s'agit bien du plus grand produit).

À la fin de la première phase, des constats peuvent être formulés (ex. : " *utiliser 1 ne sert à rien*").

Deuxième phase consiste, pour les élèves à chercher une méthode plus générale. Cette phase se déroule un autre jour et se décompose en cinq étapes.

Etape 1

Les élèves élaborent individuellement des propositions (et les formulent par écrit). Exemples : Pour former le plus grand produit...

- il faut décomposer le nombre,
- prendre des petits nombres,
- prendre la moitié,
- prendre des nombres de 2 à 4,
- ...

Etape 2

Les propositions sont débattues collectivement. L'enseignant fait un tri préalable en quatre catégories :

- celles qui n'apportent pas d'information sur la méthode (ex" *il faut faire des calculs* "),
- celles qui sont trop ambiguës (ex. : " *il faut prendre des petits nombres* "),
- celles dont la preuve semble pouvoir être établie rapidement lors d'un débat (ex. : " *mettre 1 dans le produit cela ne sert à rien* "),
- celles pour lesquelles il estime, à priori, qu'il n'y aura pas de certitude sur un accord sur leur valeur de vérité.

Suit alors un débat général sur les différents types de propositions, puis un débat plus particulier sur une proposition de la 3e catégorie (ex. : certains ont dit que pour trouver le plus grand produit, il suffisait de prendre la moitié d'un nombre quand c'était un nombre pair).

Etape 3
Les élèves ont à se prononcer, par petits groupes, sur des propositions (de la 4e catégorie) qui n'ont pu être tranchées lors de l'étape précédente (ex. : pour obtenir le plus grand produit, il faut prendre 3 ou 4).

Etape 4
Mise en commun pour expliciter les conclusions de chaque groupe.

Etape 5
Une relance de la recherche peut être effectuée.

Justification mathématiques :

Chercher, parmi les décompositions additives d'un nombre entier supérieur ou égal à 5 en nombres entiers, celle ou celles qui correspondent au plus grand produit.

La combinatoire des essais possibles étant rapidement grande, la recherche nécessite organisation et réflexion. : si l'on se restreint aux décompositions à deux termes, le produit est maximum lorsque ces deux termes sont égaux dans le cas pair et différent d'une unité dans le cas impair. Très vite, on s'aperçoit que les décompositions à deux termes ne sont pas optimales dès que le nombre proposé est supérieur ou égal à 8. L'idée de rechercher le maximum du produit à travers des décompositions équilibrées n'est pas une idée sans avenir, on peut montrer, en effet, que les décompositions optimales sont celles qui maximisent le nombre de 3 et ne comportent pas de 1.

- Pour n = 3k, la décomposition optimale est celle comportant k termes égaux à 3.
- Pour n = 3k + 1 et k > 1, il y a deux décompositions optimales : celle correspondant à (k-1) termes 3 et un terme 4 et celle correspondant (k-1) termes 3 et deux termes 2.
- Pour n = 3k + 2, il y a une seule décomposition optimale : celle comportant k termes 3 et un terme 2.

Ce qui est intéressant dans ce problème, c'est que, même avec un bagage mathématique élémentaire, la solution du problème peut émerger de la mise à l'épreuve des conjectures diverses émises par les élèves à partir de décompositions obtenues pour quelques nombres, de stratégies et généralisations issues d'améliorations locales des calculs. (Beaucoup de preuves s'appuient sur des inégalités spécifiques).

Ainsi, la conjecture du partage en deux, peut être mise en défaut sur la composition 10 = 5 + 5 via la confrontation avec la décomposition : 10 = 5 + 3 + 2 et le repérage de l'inégalité 5 < 3 x 2 peut servir ensuite à décomposer systématiquement les 5 dans les décompositions déjà trouvées pour d'autres nombres et à conjecturer qu'une décomposition optimale ne peut comporter de 5. Ceci se généralise à tout nombre supérieur à 5 puisqu'un tel nombre est toujours susceptible d'un partage en deux ne comportant pas de 1. Il reste alors pour aboutir à découvrir que tout développement optimal comporte au plus un 4 puisque 4 x 4 < 3 x 3 x 2 et au plus deux 2 car 2 x 2 x 2 < 3 x 3. Enfin, une décomposition optimale ne peut pas non plus contenir à la fois un 4 et un 2.