Des exemples au collège et au lycée : calculs exacts et approchés

I / Approximations

En classe, il est intéressant de poser la question de l'ordre de grandeur d'un résultat en ayant la possibilité de comparer avec le résultat obtenu en utilisant une calculatrice. Les deux méthodes se complètent.

Par exemple, pour évaluer la durée totale d'un CD, on peut ajouter au total des minutes autant de minutes que la moitié du nombre de plages. Cette méthode d'approximation se justifie en considérant que les durées en seconde sont en moyenne de 30s. Il parait intéressant, au lieu d'interdire l'usage de la calculatrice pour ce type d'exercices, de comparer les résultats obtenus par le calcul réfléchi et avec la machine.

Exercice 1 :

Sur un CD, on peut lire les 14 morceaux avec les durées suivantes :

4'56 ; 3'32 ; 3'32 ; 2'06 ; 4'38 ; 4'06 ; 3'06 ; 4'07 ; 4'22 ; 3'57 ; 7'23 ; 3'03 ; 6'47 ; 5'34

1. Evaluer la durée totale du CD sans calculatrice. Expliquez la (ou les) méthode(s) d'approximation utilisée(s).
2. Calculer à l'aide d'une calculatrice, la durée exacte. Expliquer votre démarche.

II / Ordre de grandeur : opérations sans calculatrice.

L'exercice suivant devrait permettre une certaine réflexion sur l'ordre de grandeur d'un résultat et plus généralement sur les opérations usuelles. Il devrait aussi inciter à un certain recul par rapport à la calculatrice puisque l'élève est invité à anticiper par rapport au résultat qu'il pourrait lire sur l'écran. Ces objectifs ne seront atteints que si l'enseignant explique bien la consigne, la tâche attendue et s'il prend soin de faire expliciter les démarches de chacun.
La mise en commun des différentes méthodes d'approximation est importante, ne serait-ce que pour donner des méthodes à ceux qui n'en ont pas et qui n'arrivent pas à se dégager des algorithmes opératoires.

Exercice 2 :

1. Pour chacun des calculs suivants, on vous propose plusieurs résultats. Un seul est exact. Entourer le résultat correct sans effectuer les calculs.

$\boxed{31 \times 98}$	30 018	30 318	3 038	318
$\boxed{0{,}86 \times 57}$	58,09	49,02	59,12	63,14
$\boxed{27 \times 42}$	1 131	1 132	1 133	1 134
$\boxed{57 \times 999}$	560 943	56 943	56 947	5 643

2. On multiplie 2,236 067 978 par 2, 236 067 978.

Quel est le nombre de décimales du produit obtenu ? $\boxed{}$

Quelle est sa dernière décimale ? $\boxed{}$

Lorsque l'on effectue, sur une calculatrice, la séquence de touches suivantes :

$\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ elle affiche : $\boxed{\mathbf{2.236\ 067\ 978}}$

Ce nombre est-il égal à $\sqrt{5}$?

Entourer la bonne réponse et justifier.

Oui Non

Justification :

III / Les limites de la calculatrice :

Exercice 3 :

1. Quel est le 1995-*ième* chiffre après la virgule obtenu dans la division de 1 par 7 ?
2. Quel est le 1995-*ième* chiffre après la virgule obtenu dans la division de 10 par 21 ?
3. Quel est le 1995-*ième* chiffre après la virgule obtenu dans la division de 10 par 51 ?

Il s'agit de remarquer et d'utiliser la périodicité des approximations décimales d'un rationnel. Pour les deux premiers exemples, on peut « voir » la période sur l'écran de la calculatrice.

Pour le troisième exemple, pour $\frac{10}{51}$, on obtient, sur l'écran de la calculatrice comportant 10 chiffres, 0,196078431.

Mais la période n'est pas 19607843. Elle est en fait 1960784313725490 !!

Tout l'intérêt de l'activité réside dans la recherche des différents moyens pour trouver les différents chiffres après la virgule. C'est très facile avec une calculatrice possédant la division euclidienne. On effectue la division entière de 10 par 51. On note le quotient 0. On multiplie le reste par 10 et on effectue à nouveau la division entière par 51. Et ainsi de suite…

Exercice 4 :

1. Calculer, sur votre calculatrice, $1234567890^2 - 1234567889^2$. Le résultat vous parait-il exact ? Argumenter votre réponse.
2. Comparer le résultat obtenu avec d'autres modèles de calculatrice.
3. Factoriser l'expression et calculer la valeur exacte.
4. Comparer avec les résultats obtenus précédemment.

Sur une calculatrice scientifique, on obtient généralement 2 500 000 000 ou 2 469 000 000.
Puisque $(a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1$, on trouve 2 x 1234567889 + 1 = 2 469 135 779.

Exercice 5 :

1. Calculer, sur votre calculatrice, $1\,000\,000\,025^2 - 999\,999\,975^2$.
   Le résultat vous paraît-il exact ? Argumenter votre réponse.
   Comparer le résultat obtenu avec d'autres modèles de calculatrice.
2. Calculer, sur votre calculatrice, $9\,999\,999\,925^2 - 999\,999\,875^2$. Le résultat vous parait-il exact ? Argumenter votre réponse.
   Comparer le résultat obtenu avec d'autres modèles de calculatrice.
3. Développer $(a + b)^2 - (a – b)^2$.
   Appliquer le développement précédent aux expressions du 1) et du 2) pour trouver les valeurs exactes.

Il est intéressant d'utiliser l'égalité $(a + b)^2 - (a – b)^2 = 4ab$. On trouve donc pour la première expression $4\times10^9\times25=10^{11}$. Les calculatrices donnent en général ce résultat.
Pour la seconde, on trouve $4\times9{,}9999999\times10^9\times25=3{,}9999996\times10^{11}$. Avec une calculatrice, on trouve généralement 10^{12}.

Exercice 6 :

1. Calculer avec votre calculatrice 87 12 870 $\div$ 48 506 557.
2. Comparer le résultat obtenu avec le résultat de 505 149 $\div$ 2 812 281.
3. Qu'en pensez vous ? Justifier votre réponse.

Cet exercice permet de faire vivre la définition du quotient vu en sixième ainsi que la recherche du dernier chiffre d'un produit.