NOMBRES en ECRITURE FRACTIONNAIRE et COMPARAISON.

Quand, parfois, on dit des bêtises en ne faisant pas (*assez ?*) confiance à la calculatrice ![1]

Une tâche usuelle en classe de cinquième : **comparer 420/595 et 12/17**.

Un « bon » élève de ce niveau (*et d'autres !*) prend sa calculatrice et affiche les résultats de :

- ✓ $\boxed{420 \div 595 =_{\textbf{calc}} 0.705882352941176}$. (*Valeur décimale tronquée au quinzième chiffre après la virgule, calcul effectué avec la calculatrice de l'ordinateur*).
- ✓ $\boxed{12 \div 17 =_{\textbf{calc}} 0.705882352941176}$. ***Eh ben, M'sieur, c'est égal !***

Qui d'entre nous n'a pas dit qu'il était éventuellement possible qu'à partir d'un certain rang, *non affiché ou non visible !*, des décimales peuvent être différentes et que par conséquent, la calculatrice, pour cette tâche n'est pas tout à fait performante. Bien sûr, le professeur a en tête des techniques de simplification « à la main » ou d'autres techniques enseignées permettant de résoudre la tâche.

L'argument ne tient pas. En effet, il n'est pas possible que les écritures décimales diffèrent à partir d'un certain rang, car les **nombres utilisés sont trop « petits »**.

On pose d = 420/595 – 12/17 = …= (±) k/595. Si k ≠ 0, on a alors k/595 > 1/595.
Or 1/595 ≈ 0,00168… Donc pour que k soit non nul, il faudrait qu'une différence apparaisse au moins dès le troisième chiffre après la virgule. Ce qui n'est pas la cas : voir les affichages ci-dessus. Point n'est besoin d'aller trop loin après la virgule !

En fait, pour pouvoir conclure à l'égalité des nombres 420/595 et 12/17, il **suffit** de vérifier que les écritures décimales de ces nombres sont identiques jusqu'au troisième rang après la virgule : dans le cas où c'est vrai, elles seront identiques à n'importe quel rang ! *Pour tester cette propriété, afficher les trois premières décimales de 419/595 et 412/595.*

On généralise :

Si deux « fractions » **a/b** et **c/d** (a, b, c *et* d *entiers naturels non nuls*) ont la même partie entière et les mêmes **n** premières décimales, en différant au **(n +1)è** rang, on a :

$$\mathbf{0 < \left| a/b - c/d \right| <} \ 10^{-n}.$$

En multipliant par **bd**, on obtient alors : $\mathbf{0 < \left| ad - bc \right| < bd \times} \ 10^{-n}$

Comme $\mathbf{\left| ad - bc \right| \geq 1}$, on aura alors : $\mathbf{bd} > 10^{n}$

Situation dont on est fort loin avec l'utilisation des « nombres entiers familiers » au collège.

[1] Source : séminaire de didactique des mathématiques des PLC2, IUFM AIX-MRS, **Y. CHEVALLARD**.

Suite : hors sujet, quoique !!!

On peut conduire le même type de raisonnement avec les **racines carrées**.

Une tâche usuelle en troisième : **comparer $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{18}$**.

Le même élève que tout à l'heure (*avec deux ans de plus !)* sort évidemment sa calculatrice et fait afficher les deux valeurs :

- ✓ $\boxed{3\sqrt{2} =_{\text{calc}} 4.24264068711}$
- ✓ $\boxed{\sqrt{18} =_{\text{calc}} 4.24264068711}$. Même réponse qu'en cinquième : **c'est égal** !!!

Même argument du (*même ?*) professeur : « Qui nous dit qu'à partir d'un certain rang, les décimales ne sont pas différentes ! ». Et bien non !

On procède de la même façon que pour les « fractions » :

Soient **a**, **b** et **c** des naturels non nuls tels que $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ aient la même partie entière et les mêmes **n** premières décimales, càd : $|a\sqrt{b} - \sqrt{c}| < 10^{-n}$ **(♣).** On suppose aussi que $a\sqrt{b} + \sqrt{c} < 10^{n}$, ce qui veut dire en fait que, **a**, **b** et **c** ne sont pas trop « grands ».
En multipliant **(♣)** par $a\sqrt{b} + \sqrt{c}$, on obtient :
$W = |a^2b - c| < 10^{-n} \times (a\sqrt{b} + \sqrt{c}) \leq 1$.
Le nombre **W** est entier. Par conséquent, il ne peut être strictement inférieur à **1** que s'il est nul.
Par suite, $a^2b - c = 0$, soit $(a\sqrt{b} - \sqrt{c}) \times (a\sqrt{b} + \sqrt{c}) = 0$, **d'où** $a\sqrt{b} = \sqrt{c}$.

Pour l'exemple choisi, on a $3\sqrt{2} + \sqrt{18} < 6 + 5 = 11 < 10^2$.

Conclusion : dès lors que les écritures décimales de ces deux nombres sont identiques jusqu'à la **deuxième** décimale, on peut affirmer que ces deux nombres sont égaux !