Exercice de première S (Brochures APMEP « Pour un enseignement problématisé des mathématiques au lycée »)

On a : $1\times 2\times 3\times 4+1=25=5^2$
$2\times 3\times 4\times 5+1=121=11^2$
$3\times 4\times 5\times 6+1=361=19^2$
Coïncidence ou pas ?

Mise en œuvre

Exercice ouvert à la maison (travail différencié)

Une solution experte, celle imaginée par le professeur !

On s'intéresse pour tout entier naturel *n* non nul à l'expression $n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1$.

C'est un polynôme du quatrième degré en *n*.
On essaie de l'écrire sous la forme du carré d'un …. polynôme du second degré !
Autrement dit, on recherche des entiers *a*, *b* et *c* tels que :

$$\text{pour tout entier } n\geq 1,\quad n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1=\left(an^2+bn+c\right)^2$$

Méthode : développer et identifier les coefficients (*a* et *c* pouvant se déterminer de tête).

Là où un élève peut nous surprendre !

- Travail sur calculatrice ou sur tableur
  $1\times 2\times 3\times 4+1=25=5^2$
  $2\times 3\times 4\times 5+1=121=11^2$
  $3\times 4\times 5\times 6+1=361=19^2$
  $4\times 5\times 6\times 7+1=841=29^2$
  $5\times 6\times 7\times 8+1=1681=41^2$
  $6\times 7\times 8\times 9+1=3025=55^2$
  Effectivement, on obtient des carrés !
  Mais **mieux** : à chaque fois, on obtient le carré du produit du premier et du dernier facteur auquel on ajoute 1 !!!

- Conjecture de l'élève
  Il semble que, pour tout entier $n\geq 1$, $n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1=[n(n+3)+1]^2$

- Démonstration de l'élève
  On pourrait s'attendre à un développement du type
  $n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1=\left(n^2+n\right)\left(n^2+5n+6\right)+1=\ldots$ pour le membre de gauche
  et
  $[n(n+3)+1]^2=\left(n^2+3n+1\right)^2=\left(n^2+3n+1\right)\left(n^2+3n+1\right)=\ldots$ pour le membre de droite.

- Mieux ! L'élève anticipe la forme du résultat à obtenir :

  $n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1=[n(n+3)+1]^2$.

  Il décide de développer le membre de gauche en laissant apparent le produit $n(n+3)$:

  $n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1=n(n+3)\underbrace{(n+1)(n+2)}+1=n(n+3)\left(n^2+3n+2\right)+1$.

  Il poursuit sa stratégie avec n^2+3n+2, en faisant apparaître le produit $n(n+3)$:

  $n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)+1=n(n+3)[n(n+3)+2]+1=[n(n+3)]^2+2n(n+3)+1$.

  Il ne lui reste plus qu'à reconnaître une identité remarquable, suggérée d'ailleurs par l'expression à obtenir, à savoir $[n(n+3)+1]^2$.

On peut penser que l'élève est « génial »... Il a en fait organisé son calcul avec intelligence.