Exercice de seconde (d'après Rallye mathématique du Centre)

Parmi les deux nombres suivants, lequel est le plus grand :

$$A=\frac{2,0000000001}{2,0000000001-(1,0000000001)^2} \quad \text{ou} \quad B=\frac{2,0000000002}{2,0000000002-(1,0000000001)^2} \ ?$$

Mise en œuvre

En module : travaux de groupes puis débat de classe
Prolongement et synthèse en classe entière
Devoir maison

Travail en module

- **Méthodes proposées par les élèves**
  1. Utiliser la calculatrice pour calculer chaque nombre
     Réponse : $A=2$ et $B=2$ donc $A=B$.
  2. Utiliser la calculatrice pour calculer la différence
     Réponse : $A-B=10^{-10}$ donc $A>B$.

- **Débat de classe menant à la nécessité d'une preuve par le calcul**

Méthode proposée par les élèves

Pour comparer deux nombres, on cherche le signe de la différence

a) Un exemple de mise en œuvre assez simple … qui <u>peut</u> aboutir

$$A-B=\frac{2,0000000001}{2,0000000001-1,0000000001^2}-\frac{2,0000000002}{2,0000000002-1,0000000001^2}$$

$$A-B=\frac{2,0000000001\times\left(2,0000000002-1,0000000001^2\right)-2,0000000002\times\left(2,0000000001-1,0000000001^2\right)}{\left(2,0000000001-1,0000000001^2\right)\left(2,0000000002-1,0000000001^2\right)}$$

$$A-B=\frac{0,0000000001\times1,0000000001^2}{\left(2,0000000001-1,0000000001^2\right)\left(2,0000000002-1,0000000001^2\right)}$$

Compétences travaillées :

- maîtrise des techniques opératoires ;
- l'intelligence du calcul (stratégie de choix des calculs à effectuer pour atteindre le signe ; utilisation d'un ordre de grandeur pour conclure, …)

b) Autre mise en œuvre retenue par quelques élèves (plutôt « bons »)

On pose :

$2,0000000002=2+2\times10^{-10}$, $2,0000000001=2+10^{-10}$ et $1,0000000001=1+10^{-10}$.

Certains élèves aboutissent assez rapidement.

D'autres se perdent dans des calculs en fait inutiles :

$1,0000000001^2=\left(1+10^{-10}\right)^2=1+2\times10^{-10}+10^{-20}$ d'où

$$A=\frac{2+10^{-10}}{2+10^{-10}-(1+2\times10^{-10}+10^{-20})}=\frac{2+10^{-10}}{1-10^{-10}-10^{-20}}$$

et

$$B=\frac{2+2\times10^{-10}}{2+2\times10^{-10}-(1+2\times10^{-10}+10^{-20})}=\frac{2+2\times10^{-10}}{1-10^{-20}}.$$

Ils obtiennent alors :

$$A-B=\frac{2+10^{-10}}{1-10^{-10}-10^{-20}}-\frac{2+2\times 10^{-10}}{1-10^{-20}}$$

$$A-B=\frac{\left(2+10^{-10}\right)\left(1-10^{-20}\right)-\left(2+2\times 10^{-10}\right)\left(1-10^{-10}-10^{-20}\right)}{\left(1-10^{-10}-10^{-20}\right)\left(1-10^{-20}\right)}$$

Suivent alors des calculs pas toujours justes sur les puissances …

Prolongement en classe

- **Développer l'intelligence du calcul en anticipant « la forme » de chacun des nombres :**

$$A=\frac{2,0000000001}{2,0000000001-\left(1,0000000001\right)^2} \quad \text{ou} \quad B=\frac{2,0000000002}{2,0000000002-\left(1,0000000001\right)^2}.$$

Plutôt que de comparer A et B, on peut comparer leurs inverses.

$$\frac{1}{A}=\frac{2,0000000001-1,0000000001^2}{2,0000000001} \quad \text{et} \quad \frac{1}{B}=\frac{2,0000000002-1,0000000001^2}{2,0000000002}.$$

- **Une première méthode pour comparer les inverses :**

Chercher le signe de leur différence (qui pose en fait moins de problème que la précédente)

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{2,0000000002\times\left(2,0000000001-1,0000000001^2\right)-2,0000000001\times\left(2,0000000002-1,0000000001^2\right)}{2,0000000001\times 2,0000000002}$$

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{-0,0000000001\times 1,0000000001^2}{2,0000000001\times 2,0000000002}$$

On obtient $\frac{1}{A}-\frac{1}{B}<0$, d'où $\frac{1}{A}<\frac{1}{B}$ et, puisque A et B sont strictement positifs, $A>B$.

- **Une autre méthode qui consiste à mieux anticiper la forme des deux inverses**

$$\frac{1}{A}=\frac{2,0000000001-1,0000000001^2}{2,0000000001} \quad \text{et} \quad \frac{1}{B}=\frac{2,0000000002-1,0000000001^2}{2,0000000002}$$

On utilise le fait que les deux formes se ressemblent à un nombre près qui apparaît deux fois

On isole ce nombre en écrivant : $\frac{1}{A}=1-\frac{1,0000000001^2}{2,0000000001}$ et $\frac{1}{B}=1-\frac{1,0000000001^2}{2,0000000002}$.

On peut alors demander aux élèves d'aboutir en recherchant le signe de la différence :

$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{1,0000000001^2}{2,0000000002}-\frac{1,0000000001^2}{2,0000000001}$ (et en pensant à factoriser …)

- **Une dernière méthode … intéressante à développer car elle permet**

  de mettre en oeuvre les règles sur les inégalités
  et aussi
  de travailler l'enchaînement des fonctions.

$$\frac{1}{A}=1-\frac{1{,}0000000001^{2}}{2{,}0000000001} \text{ et } \frac{1}{B}=1-\frac{1{,}0000000001^{2}}{2{,}0000000002}.$$

On a : $2{,}0000000001 < 2{,}0000000002$.

On obtient alors successivement

On applique la fonction inverse …

$$\frac{1}{2{,}0000000001} > \frac{1}{2{,}0000000002}$$

On multiplie chaque membre par un nombre strictement négatif

$$-\frac{1{,}0000000001^{2}}{2{,}0000000001} < -\frac{1{,}0000000001^{2}}{2{,}0000000002}$$

On ajoute 1 à chaque membre

$$1-\frac{1{,}0000000001^{2}}{2{,}0000000001} < 1-\frac{1{,}0000000001^{2}}{2{,}0000000002}$$

D'où $\frac{1}{A} < \frac{1}{B}$ et, finalement, $A > B$.

De nouveau la fonction inverse…

- **Synthèse en classe**
  Différentes méthodes, règles sur les inégalités (éventuellement démontrées), travail sur la fonction inverse, …

Réinvestissement dans un devoir maison …

Démonstration d'une « règle » sur les inégalités (fonction carré)

Exercice : Les nombres $\sqrt{1{,}00000001}$ et 1,000000005 sont-ils égaux ?
Si oui, démontrez le. Sinon, déterminez lequel est le plus grand.