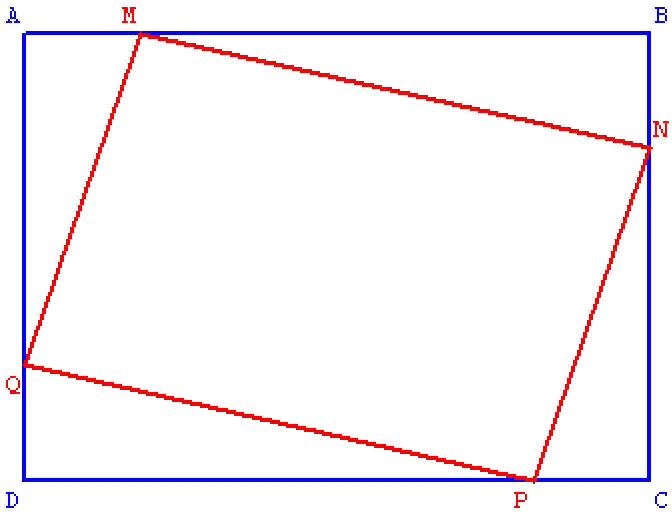
Un exemple sur la liaison Collège - Lycée

Le quadrilatère qui tourne
(d'après une « brochure Inter-Irem pour la classe de seconde »)

On considère un rectangle ABCD avec AB= 7 cm et BC = 5 cm.
Pour tout point M du segment [AB], on considère les points N, P et Q situés respectivement sur les segments [BC], [CD] et [DA] tels que AM = BN = CP = DQ.
On s'intéresse aux variations de l'aire du quadrilatère MNPQ lorsque le point M se déplace sur le segment [AB] et plus précisément à la valeur minimale de cette aire.



Une exploration géométrique réalisée avec un logiciel de géométrie dynamique permet :

- de comprendre que la situation est liée à un point mobile ;
- d'appréhender le fait que l'aire du quadrilatère MNPQ est fonction d'une variable ;
- d'anticiper les variations de cette aire ;
- d'invalider certaines idées fausses (les élèves ont tendance penser que le minimum est atteint lorsque M est le milieu du segment [AB])
- de conjecturer la position de M qui correspond à une aire minimale ;
- éventuellement de rechercher plus généralement un lien entre la longueur AM qui correspond au minimum et le périmètre du rectangle ABCD.

L'algèbre permet de modéliser la situation et de prouver la conjecture faite à l'aide du logiciel.

Ce qu'en dit le document d'accompagnement des programmes de seconde :

> « La notion de fonction est difficile à appréhender ; elle est déjà présente au collège… Pour aborder la notion de fonction dans une acception plus générale, le programme de seconde propose de s'appuyer sur quelques situations simples. On privilégiera celles pour lesquelles l'explicitation du lien entre deux grandeurs permet de répondre à une question. »

Des problèmes de variations comme celui-ci où l'on peut conjecturer puis valider la valeur exacte du ou des extrema cherchés, sont donc particulièrement intéressants à ce niveau d'apprentissage (troisième-seconde). Ils permettent en effet de donner du sens à la notion de fonction. Ils seront enrichis en première avec l'outil des dérivées.

Travail de liaison / Troisième – Seconde

<u>Premier temps</u> : appropriation du problème, à la maison

ABCD est un rectangle tel que AB = 7 cm et BC = 5 cm.
M est un point du segment [AB], N est un point du segment [BC], P est un point du segment [CD] et Q est un point du segment [DA] tels que AM = BN = CP = DQ.

A) 1) On se place dans le cas où AM = 2cm.
Faire la figure en vraie grandeur.
Calculer dans ce cas l'aire en cm² du quadrilatère MNPQ.

2) Reprendre le calcul de l'aire dans le cas où AM = 4cm.

3) Que se passe-t-il si AM = 0 cm ? si AM = 5 cm?

<u>Deuxième temps</u> : TP informatique (construction de la figure et conjectures)

<u>Troisième temps</u> : Devoir maison (on poursuit l'étude)

B) On se place dans le cas général où M est un point quelconque du segment [AB] et on pose AM = x cm. On note S(x) l'aire en cm² du quadrilatère MNPQ.

a) Donner les expressions, en fonction de x, de l'aire en cm² de chacun des triangles AMQ et BMN.

b) En déduire l'expression, en fonction de x, de l'aire en cm² du quadrilatère MNPQ.

c) Déduire du **b)** que $S(x) = 2x^2 - 12x + 35$.

C) 1) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous (on donnera des valeurs décimales approchées de S(x) à 0,1 près).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	2,75	3	3,25	3,5	4	4,5	5
S(x)													

2) Représenter graphiquement la fonction S qui à tout $x \in [0 ; 5]$ associe l'aire S(x).
On se placera dans un repère orthogonal du plan en prenant pour unités graphiques 2 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée.

3) Lire sur le graphique pour quelle valeur de x l'aire S(x) semble minimale.
Peut-on l'affirmer ou n'est-ce qu'une conjecture ? Justifier la réponse.

D) Validation de la conjecture

1) Calculer le nombre S(3).

2) Prouver que pour tout $x \in [0 ; 5]$, $S(x) - S(3) = 2(x-3)^2$.

3) En déduire que, pour tout $x \in [0 ; 5]$, $S(x) - S(3) \geq 0$.

4) Prouver que le nombre S(3) est la plus petite des valeurs de la fonction S sur l'intervalle [0 ; 5].

E) Conclusion

Donner la position du point M du segment [AB] pour laquelle l'aire du quadrilatère MNPQ est minimale. Préciser la valeur de cette aire minimale et déterminer les dimensions du quadrilatère MNPQ correspondant.

Fiche d’accompagnement

Enjeux pédagogiques en classe de 3° et en classe de 2nde :

- ✓ Aire de polygones
- ✓ Calcul littéral
- ✓ Notion de fonction
- ✓ Différentes représentations d’une fonction (tableaux de valeurs, notation S(x), représentation graphique)
- ✓ Notion de maximum et de minimum : interprétation graphique
- ✓ Identités remarquables
- ✓ Retour sur la règle du débat « des constatations ou des mesures sur un dessin ne suffisent pas pour démontrer qu’une conjecture est vérifiée. »
- ✓ Travail sur le vocabulaire : « image », « conjecture», …
- ✓ Notion d’intervalle et notation (initiation)
- ✓ Travail sur les nombres irrationnels

Place de ce travail dans la progression annuelle de 3° :

Ce travail peut être commencé au mois de Janvier.

Les élèves ont rencontré au premier trimestre la notion de fonction avec ses différentes représentations ainsi que les liens qu’elles ont entres elles.

Les notions de minimum et de maximum ont été interprétées graphiquement.

Les élèves ont également étudié l’algèbre en retravaillant les notions des classes précédentes mais n’ont pas encore vu les identités remarquables.

La notion d’intervalle a été utilisée en statistique lors des regroupements en classes.

La notion de conjecture affirmée ou infirmée est régulièrement travaillée depuis la classe de 6°.

Le travail proposé peut servir de reprise de la notion de fonction avant de poursuivre d’une part l’étude des fonctions avec celle des les fonctions affines et, d’autre part, le calcul algébrique.

Place de ce travail dans la progression annuelle de 2nde :

Le travail peut être donné au début de la classe de seconde comme reprise de l’étude sur les fonctions. Il permet de revenir sur le vocabulaire (image) et peut motiver l’entrée dans l’étude des variations (notion de croissance et de décroissance).

<u>Différences d'approche dans ces deux niveaux et commentaires :</u>

Ce type de travail a été testé deux années consécutives dans deux classes de troisième et une seule année dans une classe de seconde donc dans cinq classes au total.

Les parties A, B et C n'ont pas posé de problèmes particuliers aux élèves de troisième. Seule la question C 3) a nécessité des explications.

La partie D a semblé plus délicate en troisième comme en seconde. C'est d'ailleurs dans cette partie que l'on constate des ruptures entre le collège et le lycée.
En effet, on rencontre en seconde un autre problème à la question D 2) pour laquelle les élèves du lycée ont tenté une factorisation de $S(x) - S(3)$ alors que ceux de troisième ont plutôt essayé de développer, ce qui les a en général menés au résultat.

La constatation s'est inversée pour la question D 4) où un nombre bien supérieur de lycéens par rapport aux collégiens ont effectué une résolution correcte. Les collégiens n'ont par contre pas fait le lien avec la question précédente.

Enfin, le recours systématique au théorème de Pythagore pour calculer la longueur des côtés du quadrilatère a été davantage un réflexe de collégiens que de lycéens.

Evidemment, toutes ces contestations sont à relativiser car une seule classe de seconde a été testée sur ce travail.