Démonstrations
Les identités remarquables
Les compétences : représenter, chercher, raisonner, calculer communiquer.

1 Introductions différenciées et définition

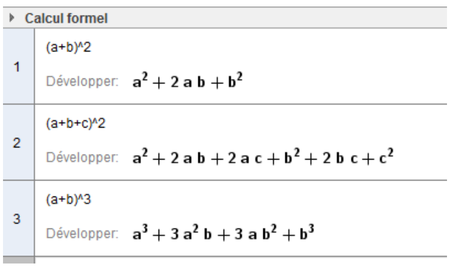
Activité 1
Proposition : pour tout nombre réel a et b, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.
Est-ce que cette proposition est vraie ?
Une erreur classique pour raisonner : par contre-exemple on prouve que l'égalité est fausse, ensuite on peut s'interroger de savoir dans quel(s) cas l'égalité est vraie ce qui engage les élèves à développer convenablement $(a+b)^2$.

Activité 2, exercice de développement :
Dans cet exercice on propose de donner des coups de pouces suivants les productions des élèves, un coup de pouce sert à lever les difficultés.
a et b sont des nombres réels, développer les expressions suivantes :

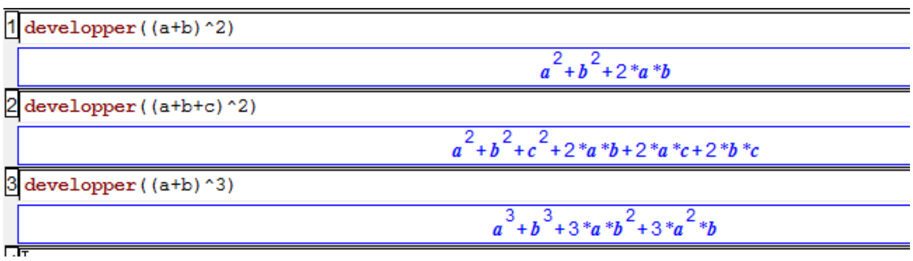
1. Les identités remarquables :
   (a) $(a+b)^2$
   Un coup de pouce : $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$
   (b) $(a-b)^2$
   (c) $(a+b)(a-b)$
2. $(a+b+c)^2$
   Un coup de pouce : $(a+b+c)^2 = (a+(b+c))^2$ et se servir du résultat obtenu en 1. On pourra poser $(b+c) = B$ et développer $(a+B)^2$, puis poursuivre les développements appliquant $b+c$.
3. $(a+b)^3$
   Un coupe de pouce : $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$ on développe dans une parenthèse $(a+b)^2$ et on termine le développement général.
4. Montrer les égalités suivantes :
   (a) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$,
   (b) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Pour cette activité on peut projeter les résultats établis par le calcul formel de GeoGebra ou Xcas (des élèves peuvent passer au tableau au fur et à mesure pour la saisie), ça donne l'objectif du résultat aux élèves :

GeoGebra

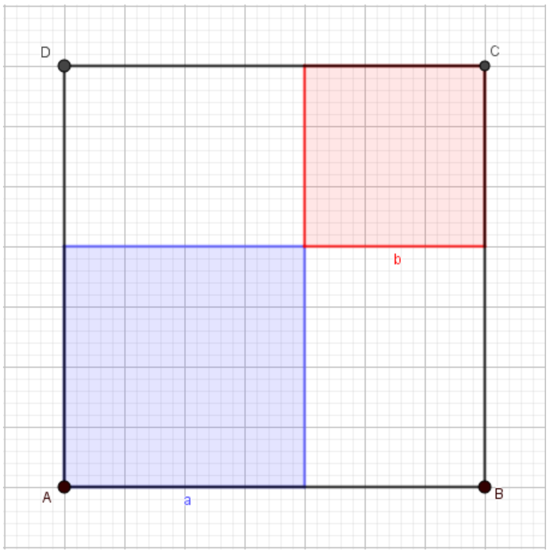


Xcas



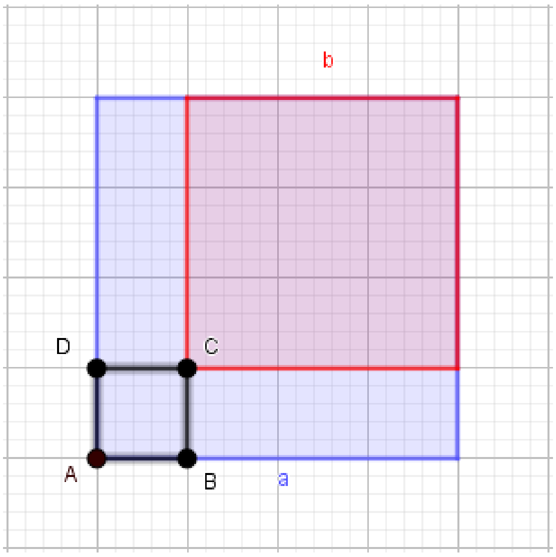
Activité 3

1. Soient deux carrés de côté a et b où a et b sont deux nombres réels strictement positifs :



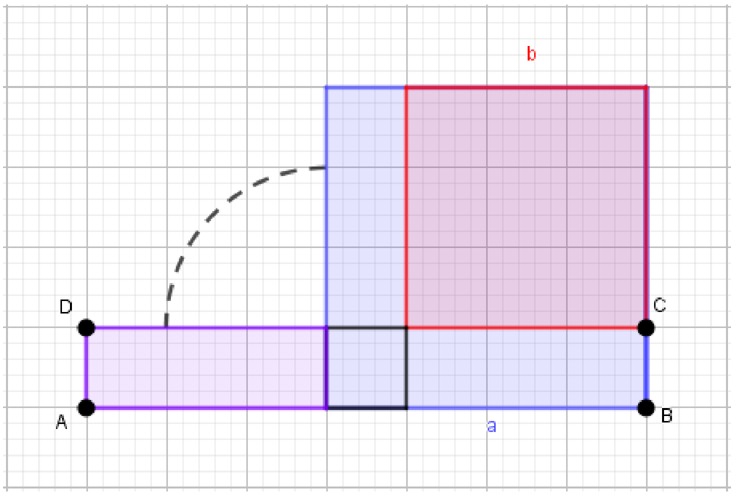
   (a) Exprimer l'aire du carré ABCD en fonction de a et b.
   (b) Développer $(a+b)^2$. Que représente l'expression $2ab$ sur la figure ?

2. Soient deux carrés de côté a et b où a et b sont deux nombres réels strictement positifs (ici $a > b$):



   (a) Exprimer l'aire du carré ABCD en fonction de a et b.
   (b) Développer $(a-b)^2$. Que représente l'expression $2ab$ sur la figure ?

3. Soient deux carrés de côté a et b où a et b sont deux nombres réels strictement positifs (ici $a > b$):



   (a) Exprimer l'aire du rectangle ABCD en fonction de a et b.
   (b) Développer $(a-b)(a+b)$. Dans le carré de côté a, hachurer l'aire d'expression $a^2 - b^2$.

Définition : On appelle identités remarquables les résultats suivants, pour tous les réels a et b :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Exemple-exercice :
Développer et simplifier les expressions suivantes :

1. $(5x-1)^2$
2. $(2x+3)(2x-3)$
3. $(0,5x+1)^2 - (0,5x-3)^2$

2 Applications des identités remarquables

2.1 Calcul mental

Exercice :

1. Avec l'identité remarquable appropriée développer $(30-2)^2$. En déduire la valeur de 28^2.
2. Calculer mentalement :
   - 31^2
   - 25×35
   - $75^2 - 25$

   Les élèves peuvent se mettre au défi de calculer le plus rapidement possible et se proposer entre eux des exemples du même type. La vérification se fait par la calculatrice si nécessaire

2.2 Résolution d'équations, factorisation

Exercice :

1. Résoudre l'équation $36x^2 - 12x + 1 = 0$.
2. Résoudre l'équation $4x^2 - 9 = 0$ de deux manières dont une faisant intervenir une identité remarquable.
3. Résoudre l'équation $0,25x^2 + x = -4$

2.3 Des approches historiques qui peuvent être des travaux de productions différenciées

2.3.1 Les identités remarquables selon al Khwarizmi, site `https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/khwarizmid`

Dans son ouvrage Kitâb al-jabr wa al-muqâbala, " Le livre du rajout et de l'équilibre ", l'astronome et mathématicien perse al Khwarizmi présente sa méthode de résolution des équations (muadala).
Il formule ce qui sera appelé les identités remarquables ainsi que la règle des signes sans justifications.
Voici un extrait p27-30 qui présente sur des exemples les trois identités remarquables :
On peut enlever des "traductions" mathématiques et demander à un élève de compléter le tableau :

Le texte	traduction algébrique
Et si on dit : dix et une chose par elle-même.	$(10 + x)(10 + x)$
Tu dis : dix par dix : cent,	$10 \times 10 = 100$
et dix par une chose : dix choses,	$10x$
et dix par une chose : dix choses également,	$10x$
et une chose par une chose : un bien ajouté.	x^2
Cela sera cent dirhams et vingt choses et un bien ajouté.	$100 + 20x + x^2$
Et si on dit : dix moins une chose par dix moins une chose.	$(10 - x)(10 - x)$
Tu dis : dix par dix : cent,	$10 \times 10 = 100$
et moins une chose par dix : dix choses retranchées,	$-10x$
et moins une chose par dix : dix choses retranchées,	$-10x$
et moins une chose par moins une chose : un bien ajouté.	x^2
Cela sera cent dirhams et un bien moins vingt choses.	$100 - 20x + x^2$
Et si on dit : dix moins une chose par dix et une chose.	$(10 + x)(10 - x)$
Tu dis : dix par dix : cent,	$10 \times 10 = 100$
et moins une chose par dix : dix Choses retranchées,	$-10x$
et une chose par dix : dix choses ajoutées,	$10x$
et moins une chose par une chose : un bien retranché.	$-x^2$
Tu auras : cent dirhams moins un bien.	$100 - x^2$

2.3.2 Identité de Sophie Germain

L'identité de Sophie Germain énonce que pour tous nombres réels x et y, on a :
$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy) = ((x + y)^2 + y^2)((x - y)^2 + y^2)$.
Préciser, par des calculs, chacune des égalités.
Remarque : ici la différenciation se fait naturellement entre un élève qui saura factoriser et un élève qui ne maîtrise que le développement. Il peut être intéressant de comparer les différentes approches entre les élèves pour enrichir les méthodes de calculs et en comparer les performances.

2.3.3 Identité d'Argan

x est un nombre réel, démontrer l'identité $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$.

2.3.4 Identité de Gauss

a et b sont des nombres réels, justifier par le calcul les identités suivantes
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2]$.

2.3.5 Identité de Legendre

a et b sont des nombres réels, démontrer l'identité :
$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$,$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$,$(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$.

2.4 L'identité de Lagrange

a, b, c, x, y et z sont des nombres réels, démontrer l'identité suivante :
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$

Puis l'identité suivante :
$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = (ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2$.

2.4.1 L'identité d'Euler

Le théorème des quatre carrés de Lagrange, également connu sous le nom de conjecture de Bachet, s'énonce de la façon suivante :
Tout entier positif peut s'exprimer comme la somme de quatre carrés.
Plus formellement, pour tout entier positif n, il existe des entiers a, b, c, d tels que :

$$n = a^2+b^2+c^2+d^2$$

La démonstration du théorème repose (en partie) sur l'identité des quatre carrés d'Euler :

$$\begin{array}{rcl}(x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2+t_2^2) & = & (x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2+t_1t_2)^2 \\ & & +(x_1y_2-y_1x_2+t_1z_2-z_1t_2)^2 \\ & & +(x_1z_2-z_1x_2+y_1t_2-t_1y_2)^2 \\ & & +(x_1t_2-t_1x_2+z_1y_2-y_1z_2)^2.\end{array}.$$

Retrouver l'identité d'Euler par des calculs.
Une approche algorithmique du théorème dans le cas où a, b, c et d ne sont pas nuls :

```python
#approche algorithmique du théorème des quatre carrés de Lagrange
#avec ici a b c et d non nuls

def quatre_carre(n):
    L=[]
    for a in range(1,n):
        for b in range(1,n):
            for c in range(1,n):
                for d in range(1,n):
                    if pow(a,2)+pow(b,2)+pow(c,2)+pow(d,2)==n:
                        return [a,b,c,d]

for n in range(4,51): #donne une liste de nombres qui conviennent si elle existe
    print("n=",n,"liste [a,b,c,d]",quatre_carre(n))
```

quatrecarrelagrange.py

3 Différenciation

3.1 Introduction des identités remarquables

3.1.1 Processus, compétence représenter

Commencer par l'erreur ! $(a+b)^2 = a^2+b^2$.
L'apprentissage par l'erreur et la production d'un raisonnement (un contre-exemple) doivent être le plus couramment utilisés, c'est un très bon outil de la différenciation.
L'introduction par la représentation géométrique (ou autre), permet de favoriser la mémorisation du double produit.

3.1.2 Contenus

Tous les élèves font les trois activités différenciées, tous les contenus (développements et représentations géométriques ou historiques) sont traités.

3.1.3 Structure - Production

néant

3.2 Les exercices de bases (développements, calcul mental, résolutions d'équations)

3.2.1 Processus, contenus et structure

On peut favoriser l'autonomie des élèves en les mettant par binôme :

- trouver un énoncé semblable à la consigne de l'exercice (faire varier les nombres)
- échanger avec votre binôme
- Résoudre l'exercice
- échanger avec votre binôme
- vérifier le résultat (le cas échéant vérifier avec le calcul formel).

Les élèves travaillent avec leur contenu, l'enseignant peut orienter sur le choix de nombres plus difficiles.
Le **défi** est source de motivation pour les élèves (celui qui va le plus vite sans se tromper, trouver un système de points pour motiver les productions etc...)

3.2.2 Productions

On choisit au hasard des productions de binômes qui sont exposées au tableau et rapidement recalculées (mentalement).
On peut aussi sur le même principe donner quelques exemples bilans qui sont travaillés avec toute la classe.

3.3 Pour aller plus loin : les identités remarquables des mathématiciens

3.3.1 Structure

Les élèves sont en binôme, chacun fait une identité différente de celle de son binôme.

3.3.2 Contenus

Les élèves choisissent une identité parmi celles proposées.
Une fois l'exemple traité, les élèves les plus rapides pourront faire autant d'identités qu'ils le souhaitent. On pourra orienter les élèves les plus rapides vers l'identité d'Euler et son application.

3.3.3 Processus

Pour une même identité, il peut y avoir différente stratégie (partir du membre de gauche, de droite ou les deux).
Chaque cas doit être exposé et commenté.
Le travail peut servir d'auto-évaluation ou d'évaluation entre pair, on peut proposer une grille de compétence sur le calcul :
exemple :

compétence calculer	maîtrise insuffisante	maîtrise fragile	maîtrise satisfaisante	très bonne maîtrise	non évaluée
reconnaissance de l'identité remarquable					
développement					
factorisation					
simplification expression					
Effectuer une succession d'opérations					
Capacité à vérifier ses résultats					

Correction entre binôme : chacun corrige l'identité de l'autre.

3.3.4 Production

Correction des travaux dans la classe par l'enseignant. Vérification de la grille des acquis de la compétence calculer. Le cas échéant proposer des remédiations sur des exemples plus simples.
Faire un bilan des identités (les élèves peuvent présenter leur identité à la classe), notamment sur les processus : Pour gagner du temps sur la présentation on peut prendre en photo le développement et le vidéo-projeter, le binôme commente leur travail, les erreurs trouvées etc... (compétence communiquer)
Les travaux sont mis à disposition des élèves sur un réseau.
Les élèves pourront réviser à la maison sur des exemples nouveaux qui ont été corrigés par leur camarade.
Pour aller plus loin, pour tous les élèves : proposer une recherche sur le mathématicien concerné par l'identité.

Exemple de grille sur la compétence communiquer :

compétence communiquer rendre compte d'une démarche	maîtrise insuffisante	maîtrise fragile	maîtrise satisfaisante	très bonne maîtrise	non évaluée
qualité d'expression orale					
qualité d'expression écrite					
connaissance du vocabulaire					

quelques commentaires sur cette grille :
Présenter, expliquer Décrire la démarche n'est pas anodine, il faut faire preuve d'exigence et de rigueur dans la construction du raisonnement.
L'élève devra répondre à la problématique, formuler une conclusion, présenter les résultats avec soin et lisibilité.
Rédiger ou exprimer à l'oral dans un langage correct la formulation d'un résultat, savoir mettre en évidence les différentes étapes (ici d'un calcul) est un enjeu de la communication.
Il faudra que l'élève utilise un vocabulaire adapté et précis.