

**47** On considère la suite  $F$  définie par  $F_0 = 1, F_1 = 1$  et pour tout entier  $n, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ .

**1** Calculer les six premiers termes de la suite  $F$ .

**2** Calculer les rapports  $\frac{F_{i+1}}{F_i}$  pour  $i$  variant de 0 à 5.

**Léonard de Pise** (1175-1250), souvent appelé **Fibonacci**, a donné son nom à une suite d'entiers. Cette suite possède des propriétés intéressantes. En calculant le quotient de deux nombres consécutifs dans la suite de Fibonacci, on obtient une suite convergente vers le « nombre d'or »  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .



Leonardo de Pisano  
(1175-1250).

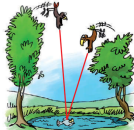
#### 84 Les oiseaux et le poisson

(D'après le Rallye mathématique de l'académie de Lyon)

De chaque côté d'un plan d'eau se trouve un arbre. La hauteur du premier est de 30 m et celle du second de 20 m ; la distance entre leurs pieds est de 50 m.

Sur la cime de chaque arbre est perché un oiseau. Brusquement, ils aperçoivent un poisson à la surface de l'eau entre les deux arbres. Ils se jettent simultanément sur lui, à la même vitesse et l'atteignent au même instant.

À quelle distance du pied du plus grand des deux arbres se trouvait le poisson ?



Le problème de l'exercice 84 a été traité sous une forme peu différente par **Léonard de Pise dit Fibonacci** (1175 à Pise, 1250) dans un des premiers livres d'arithmétique : *Liber Abaci* en 1202.



#### 131 La suite de Fibonacci



On considère la suite définie par  $u_0 = 1 ; u_1 = 1$  et la relation :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. Calculer  $u_2, u_3, u_4$  et  $u_5$ .
2. Écrire un algorithme de calcul des termes de cette suite jusqu'à un rang  $N$  donné.
3. À l'aide de la calculatrice, créer un programme correspondant à l'algorithme précédent. Déterminer à l'aide de ce programme  $u_{24}$ .

**PISTE** : Pour échanger les valeurs de deux variables on peut, par exemple, utiliser une troisième variable.

#### Point Histoire

La suite de Fibonacci doit son nom à un mathématicien italien du XIII<sup>e</sup> siècle connu sous le nom de *Leonardo Fibonacci* qui, dans un de ses ouvrages, décrit la croissance d'une population de lapins :

« Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? ».



Des allusions...

## ACTIVITÉ 2 Placement d'argent avec intérêts composés

Le 1<sup>er</sup> janvier 2011 vous avez reçu 1 000 € ; votre capital, noté  $C_0$ , est alors placé à 3 % avec intérêts composés pendant plusieurs années.

- 1<sup>o</sup> Le 1<sup>er</sup> janvier 2012, quel est le montant des intérêts obtenus pour ce capital ? De quel nouveau capital  $C_1$  disposez-vous alors ?
- 2<sup>o</sup> Le 1<sup>er</sup> janvier 2013, quel est le montant des intérêts produits par le capital  $C_1$  pour l'année 2012 ? Quel est votre nouveau capital  $C_2$  ?
- 3<sup>o</sup> Le 1<sup>er</sup> janvier 2014, quel est le montant des intérêts produits par le capital  $C_2$  pour l'année 2013 ?
- 4<sup>o</sup> Calculer de même  $C_3, C_4, \dots$  pour déterminer à partir de quelle année votre capital initial  $C_0$  a augmenté de plus de la moitié de sa valeur.
- 5<sup>o</sup> a) Les augmentations successives de capital  $C_1 - C_0, C_2 - C_1, C_3 - C_2$  sont-elles constantes ?

b) Calculer  $\frac{C_1}{C_0}, \frac{C_2}{C_1}, \frac{C_3}{C_2}, \frac{C_4}{C_3}$ . Que constatez-vous ?

c) Écrire sans justification une relation générale permettant de passer du capital  $C_n$  obtenu la  $n$ -ième année à  $C_{n+1}$ .

d) Justifier l'égalité proposée à la question précédente.

**Dans ce chapitre nous allons établir des résultats permettant de répondre en particulier à la question suivante et qui pourront être utilisés dans de nombreuses situations analogues (évolution d'une population ou d'un prix augmentant ou diminuant d'un taux fixe chaque année ou chaque mois...) :**  
Peut-on calculer  $C_n$  en fonction de  $C_0$  et de  $n$ , sans passer par les intermédiaires  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  ?



Leonardo  
Fibonacci  
1175 - 1240

### Quelques mots d'histoire

Dans l'Antiquité, on utilisait des méthodes de calcul (on dirait aujourd'hui des algorithmes) permettant d'obtenir une succession de valeurs approchées d'un même nombre qu, par exemple, était une longueur, un angle, une aire ou un volume.

On définissait ainsi ce qui, bien plus tard, s'appellera une « suite numérique » et on en étudiait certaines propriétés.

Certains problèmes faisant intervenir des suites sont devenus célèbres : ainsi, en 1202, dans le *Liber abaci* (le Livre de l'abaque), le plus grand mathématicien du Moyen Âge, Fibonacci, s'intéresse au nombre de descendants que deux lapins peuvent avoir en une année.

Ce n'est qu'à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle que sa notation indicielle  $u_n$  a été introduite par Lagrange (1736-1813), qui est l'auteur de travaux très importants et l'un des premiers professeurs de l'École polytechnique.

**Attention !** : avec des intérêts composés, les intérêts d'une année deviennent du capital pour les années suivantes et rapportent eux aussi des intérêts.

**Méthode** : à partir des cas particuliers  $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4$  et de la question b), imaginez une algèbre dominant dans le cas général  $C_n$ , en fonction de  $C_0$ .

## 96 Suite de Fibonacci Algorithmique

Un couple de lapins adultes donne naissance tous les débuts de mois à un autre couple de lapins. Un couple de jeunes lapins doit attendre deux mois avant de pouvoir donner naissance à un nouveau couple de lapins.

Supposons que l'on dispose d'un couple de bébés lapins, on note  $u_n$  le nombre de couple de lapins  $n$  mois plus tard,  $u_0$  étant le nombre initial de couple de lapins (on a donc  $u_0 = u_1 = 1$ ).



- a. Calculer  $u_2, u_3, u_4$  et  $u_5$ .
- b. La suite est-elle arithmétique ? Géométrique ?
- c. Trouver une formule qui relie les termes consécutifs de la suite  $u$ .
- d. Écrire un programme permettant de connaître le  $n^{\text{ième}}$  terme de la suite  $u$ .

& des occasions manquées...