Olympiades académiques de mathématiques 2018

Académie de Limoges

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les candidats indiqueront leur nom, prénom, classe, série et établissement sur la copie. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Mercredi 14 mars de 10h10 à 12h10

Tous les candidats traitent **deux exercices.** Chaque candidat doit résoudre individuellement les deux exercices. Les élèves de la série S doivent traiter les exercices 1 et 2 dans leur intégralité. Ceux des autres séries doivent traiter l'exercice 1 dans son intégralité et uniquement les questions 1 à 4 de l'exercice 2.

Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)

Opérations sur tableaux et matrices de Leslie

Partie 1 : Opérations sur des tableaux

Dans cette partie, nous allons définir le « produit » d'un tableau 2 × 2 (c'est-à-dire 2 lignes et 2 colonnes) par un tableau 2 × 1 comme suit :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \lambda & \kappa \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\mu + \gamma\nu \\ \lambda\mu + \kappa\nu \end{pmatrix}$$

1) Effectuer le produit

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) Trouver les valeurs de x et y vérifiant :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Partie 2 : La population d'hirondelles de cheminée (*Hirundo Rustica*) de Pierre-Buffière présente les caractéristiques suivantes. En premier lieu, elles font toutes leur retour dans le village le 31 mars exactement, pour s'accoupler.

En outre :

- Les femelles, nées le printemps précédent, âgées ainsi de 1 an, donnent toutes naissance à 2 individus ;
- Les autres femelles, âgées de 2 ans et plus, donnent naissance à 4 individus ;
- Seulement 20% des nouveau-nés de l'année précédente atteignent l'âge de 1 an et font ainsi leur retour au village ;
- 80% des jeunes d'un an atteignent l'âge de 2 ans ;
- 60% des oiseaux de 2 ans et plus survivent d'une année sur l'autre.

On suppose, pour simplifier, que le nombre de femelles est égal au nombre de mâles.

Un chercheur en dynamique des populations de l'université de Limoges vient chaque 31 mars à Pierre-Buffière et dénombre les individus de 1 an d'une part, et ceux de 2 ans et plus d'autre part (notons que les nouveau-nés ne sont pas encore nés).

En 2010, ce chercheur décompte 200 jeunes hirondelles de 1 an, et 800 hirondelles de 2 ans et plus. Il note J_0 le nombre de jeunes en 2010, et A_0 le nombre d'hirondelles de 2 ans et plus : $J_0 = 200$ et $A_0 = 800$.

I. En 2011 :
   1) On s'intéresse ici au nombre de jeunes hirondelles en 2011 :
      a) À combien d'oisillons vont donner naissance les jeunes hirondelles de 2010 ? Combien feront leur retour à Pierre-Buffière en 2011 ?
      b) À combien d'oisillons vont donner naissance les hirondelles de 2 ans et plus de 2010 ? Combien feront leur retour à Pierre-Buffière en 2011 ?
      c) Combien, de ce fait, le chercheur comptera-t-il de jeunes hirondelles en 2011 ? Il note cette valeur J_1.

   2) On s'intéresse ici au nombre d'hirondelles de 2 ans et plus en 2011 :
      a) Déterminer le nombre de jeunes individus de l'année 2010 qui atteignent l'âge de 2 ans en 2011.
      b) Déterminer le nombre d'oiseaux de 2 ans et plus de l'année 2010 qui rejoignent Pierre-Buffière en 2011.
      c) Combien, de ce fait, le chercheur comptera-t-il d'hirondelles de 2 ans et plus en 2011 ? Il note cette valeur A_1.

II. Pour l'année 2012, en procédant de la même manière, déterminer le nombre d'hirondelles de 1 an, noté J_2, et le nombre d'hirondelles de 2 ans et plus, noté A_2, observées par le chercheur.

Partie 3 : On s'intéresse dans cette partie à l'évolution de la répartition des âges des hirondelles de cette population.

Pour cela, on reprendra les notations précédentes :

- J_n est le nombre de jeunes hirondelles de l'année 2010+n ; J_{n+1} est ainsi le nombre de jeunes hirondelles de l'année suivante ;
- A_n est le nombre d'hirondelles de 2 ans et plus de l'année 2010+n ; A_{n+1} est, de même, le nombre d'hirondelles de 2 ans et plus de l'année suivante.

1) Montrer, en suivant le même raisonnement que dans la partie 2, que : $J_{n+1} = 0{,}2J_n + 0{,}4A_n$.

2) Montrer, de même, que : $A_{n+1} = 0{,}8J_n + 0{,}6A_n$.

3) Recopier sur la copie et compléter en utilisant le « produit » défini dans la partie 1 :

$$\begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix}$$

On note M_1 le tableau 2 × 2 obtenu.

4) Vérifier successivement que :

$$\begin{pmatrix} J_{n+2} \\ A_{n+2} \end{pmatrix} = M_1 \times \begin{pmatrix} J_{n+1} \\ A_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} J_{n+2} \\ A_{n+2} \end{pmatrix} = M_1 \times M_1 \times \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix}$$

5) On définit un second « produit » de deux tableaux 2 × 2 cette fois, de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \lambda & \kappa \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu & \varphi \\ \upsilon & \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\mu + \gamma\upsilon & \alpha\varphi + \gamma\psi \\ \lambda\mu + \kappa\upsilon & \lambda\varphi + \kappa\psi \end{pmatrix}$$

Déterminer M_2 le tableau 2 × 2 vérifiant : $M_2 = M_1 \times M_1$
On a ainsi :

$$\begin{pmatrix} J_{n+2} \\ A_{n+2} \end{pmatrix} = M_2 \times \begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix}$$

6) Déterminer, de manière analogue, $M_3 = M_1 \times M_1 \times M_1$

7) Rappelons que $J_0 = 200$ et $A_0 = 800$ (Partie 2). Effectuer les 3 produits suivants et dire ce que représente chacun de ces résultats.

$M_1 \times \begin{pmatrix} J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$ $M_2 \times \begin{pmatrix} J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$ $M_3 \times \begin{pmatrix} J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$

8) Quelle sera la répartition du nombre de jeunes hirondelles et d'hirondelles de 2 ans et plus dans cette population en 2018 ? Comment semble évoluer la population ?

Exercice académique 2

(À traiter dans son intégralité par les candidats de la série S)

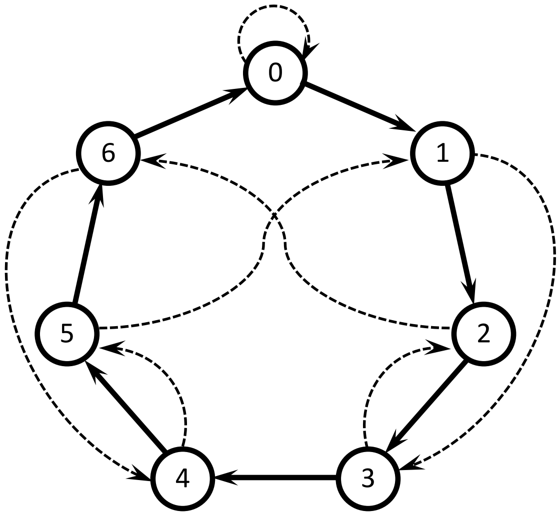
(Les candidats des séries autres que S ne traitent que les questions 1 à 4)

Le jeu de l'oie de la divisibilité

(D'après Tangente Magazine n° 174 page 36).

On se propose d'étudier la divisibilité d'un entier par un autre à travers un « jeu de l'oie » dont voici la règle.

Supposons par exemple que l'on souhaite savoir si un nombre est divisible par 7.



Étape 1 : Placez-vous sur la case 0.

Étape 2 : En suivant les flèches pleines, déplacez-vous dans le sens des aiguilles d'une montre d'autant de cases que le premier chiffre du nombre (par exemple, le premier chiffre de 973 est 9). Si ce chiffre est 0, ne vous déplacez pas.

Étape 3 : À partir de cette case, suivez la flèche en pointillés qui mène à une nouvelle case ; par exemple, le 2 mène au 6 et le 0 mène à lui-même.

Étape 4 : Répétez les opérations des étapes 2 et 3 pour le deuxième chiffre du nombre puis pour les suivants jusqu'à l'**avant-dernier chiffre inclus**.

Étape 5 : Pour le dernier chiffre du nombre, réaliser uniquement l'étape 2.

Étape 6 : Votre nombre est divisible par 7 si et seulement si vous terminez votre parcours sur la case 0.

Exemple : 902 est-il divisible par 7 ?

On part de 0. On parcourt 9 flèches pleines, ce qui nous mène en 2. La flèche pointillée nous emmène en 6.

Le chiffre suivant est 0, donc on reste en 6. Du 6, nous allons au 4. Enfin le dernier chiffre qui est 2 nous envoie en 6.

902 n'est pas divisible par 7.

En revanche, si le dernier chiffre avait été 3 plutôt que 2, le parcours précédent se serait terminé sur la case 0.

Le nombre 903 est divisible par 7.

Le **parcours du nombre 902** est donc le suivant : 0 → 2 → 6 → 6 → 4 → 6.

1) a) Donner le parcours de chacun des nombres suivants : 45, 91, 1207 et 2513.

b) Lesquels sont divisibles par 7 ?

2) Soit A un entier constitué de chiffres tous égaux à 1 (ex : 11, 111, 111, etc.)

À quelle condition portant sur le nombre de chiffres de A celui-ci est-il divisible par 7 ?

3) Le nombre B = 2 000 000 000 000 000 005 est-il divisible par 7 ?

4) a) Proposer un nombre ayant le parcours suivant : 0 → 2 → 6 → 6 → 4 → 5 → 1 → 2.

b) Y en a-t-il d'autres ? Si oui, combien ?

La suite de l'exercice est à traiter seulement par les candidats de la série S

Pour construire d'autres jeux de l'oie, voici comment les flèches pointillées sont construites pour la divisibilité par 7 :

- La flèche partant de la case 1 conduit à la case égale au reste de la division de 1×10 par 7, soit la case 3.
- La flèche partant de la case 2 conduit à la case égale au reste de la division de 2×10 par 7, soit la case 6.
- De même pour les autres cases : la case partant d'un nombre n conduit à la case égale au reste de la division de n×10 par 7.

5) Construire le jeu de l'oie de la divisibilité par 8.

6) Construire le jeu de l'oie de la divisibilité par 11.

7) a) Construire le jeu de l'oie de la divisibilité par 5.

b) On rappelle le critère de divisibilité par 5 : un entier est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5. Expliquer comment ce critère peut se déduire du jeu de l'oie.