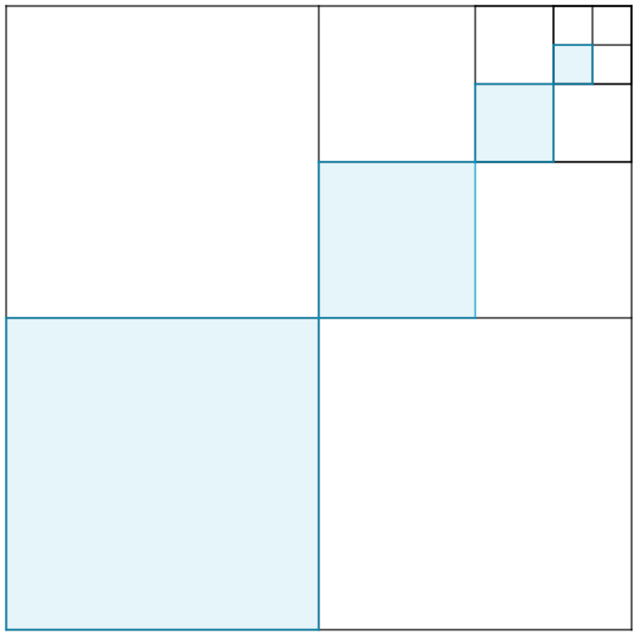
## <u>Somme des termes d'une suite géométrique et passage à la limite</u>

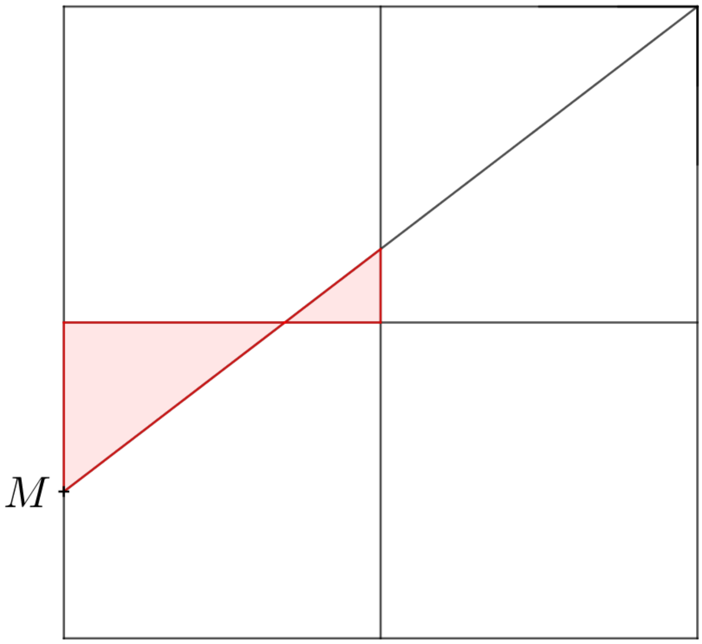
On partage un carré de côté 1 en quatre carrés identiques et on colorie le carré inférieur gauche. On répète ce procédé au carré en haut à droite et ainsi de suite.



On souhaite déterminer l'aire de la partie bleue si on poursuit indéfiniment cette construction.

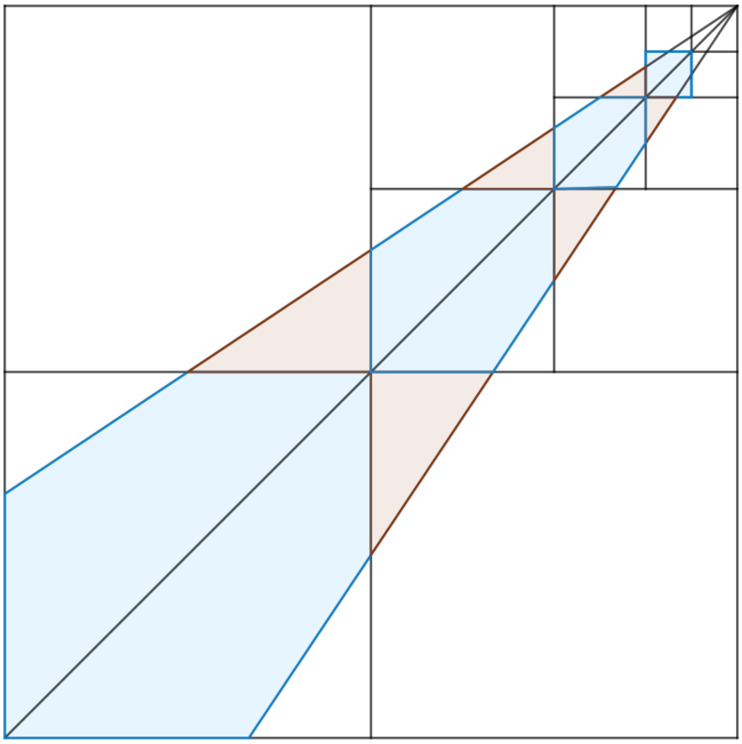
***Question préliminaire***

Comment placer le point $M$ pour que les deux triangles rouges aient la même aire ?




**En déduire l'aire de la partie bleue si on poursuit indéfiniment cette construction.**

**<u>Démonstration par manipulation</u>** :



*On prouve que l'aire en bleue est égale à l'aire coloriée ci-dessus.*
*Elle représente un tiers de l'aire du carré.*

**<u>Démonstration avec la limite d'une somme</u>** :

Soit $n \geq 1$ . On note $u_n$ l'aire du carré colorié à l'étape *n*.

$(u_n)$ est une suite géométrique de 1[er] terme $\frac{1}{4}$ et de raison $\frac{1}{4}$.

La somme des aires des *n* premiers carrés est : $S_n = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

On cherche $S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

$$S_n = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \text{ d'où } S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{3}$$