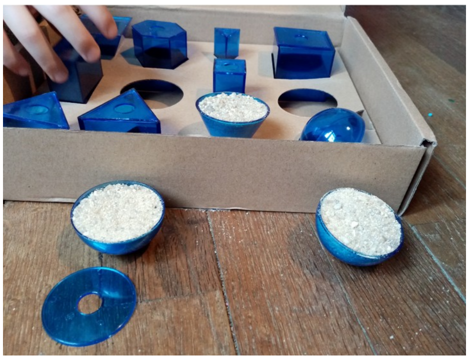
Calcul du volume d’une boule

Manipulation 1. - à la main -

Vous disposez :

- d’un cône de révolution de diamètre 5 cm et de hauteur 5 cm,
- d’une sphère de diamètre 5 cm,
- d’un cylindre de révolution de diamètre 5 cm et de hauteur 5 cm,
- d’une bouteille remplie de sable. (ou d’eau, c’est selon).

Conjecturez une relation simple reliant les volumes de ces trois solides.



La sphère possède un trou de remplissage avec un bouchon, mais elle peut être aussi coupée en deux demi-sphères, ce qui facilite la manipulation.

Préférez du sable à de l’eau…

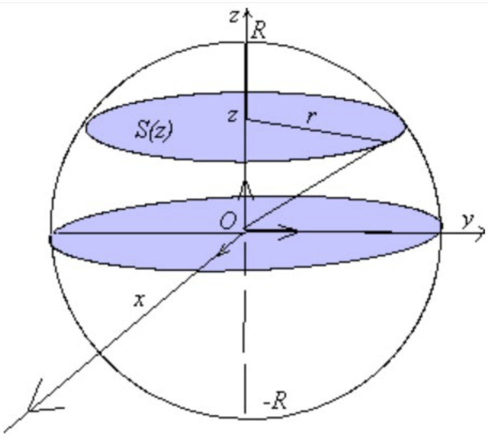
Après quelques transvasements, la conjecture arrive naturellement :

Il semble que $V_{sphère} + V_{cône} = V_{cylindre}$ soit $V_{sphère} = V_{cylindre} - V_{cône}$

Manipulation 2. - avec GeoGebra -

Ouvrir le fichier « Vol Sphère.ggb » et suivre la démarche manipulatoire, qui utilise simplement le théorème de Pythagore.

Etape 3. - La preuve avec un calcul d’intégrale -



Le volume de la sphère de sommet O et de rayon R est la somme infinie des cylindres d'épaisseur infinitésimale dz et d’altitude z.

Volume du cylindre d'épaisseur infinitésimale dz et d’altitude z

Volume de la sphère :

$$\int_{-R}^{R} S(z)dz = \int_{-R}^{R} \pi r^2 dz = \pi \int_{-R}^{R} R^2 - z^2 dz = \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-R}^{R}$$

$$= \pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3} \right) \right] = \pi \left(2R^3 - 2\frac{R^3}{3} \right)$$

$$= \pi R^3 \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \pi R^3 \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3$$