Les origines mathématiques de l'harmonie musicale

I. Introduction

La légende raconte que le mathématicien grec Pythagore, passant près d'une forge, entendit différents marteaux émettre des sons différents en frappant la même enclume. Certaines combinaisons de sons étaient harmonieuses, d'autres moins. Intrigué, Pythagore examina les marteaux et se rendit compte que deux sons étaient harmonieux lorsque les masses des deux marteaux étaient dans un rapport simple de nombres entiers. Ce mathématicien et philosophe a été convaincu tout au long de sa vie que la Nature était intégralement régie par des rapports de nombres.

La perception simultanée de plusieurs notes peut donner l'impression que les notes « sonnent bien ensemble » (notes consonantes) ou qu'elles ne « sonnent pas ensemble » (notes dissonantes). En fait notre oreille est sensible au rapport des fréquences de deux notes.

Définition : En acoustique, on appelle ***intervalle*** entre deux sons de fréquences respectives f_1 et f_2 le rapport $\frac{f_2}{f_1}$

(attention ! ce terme prête à confusion : Le mot « intervalle » n'a pas le même sens ici que dans l'étude de l'ensemble ☑ des nombres réels. En musique, un intervalle est un nombre réel strictement positif)

Exemple : L'oreille humaine entend les sons dont les fréquences sont comprises entre 20 Hz et 20000 Hz. Quel est l'intervalle perçu par l'oreille humaine ?

Réponse : $\frac{f_2}{f_1} = \frac{20000}{20} = 1000$

Depuis l'Antiquité, on considère comme particulièrement harmonieux deux sons dont les fréquences f_1 et f_2 vérifient $f_2 = 2f_1$ ou encore $\frac{f_2}{f_1} = \frac{2}{1}$. Ils correspondent en musique à une même note, à deux hauteurs différentes.

Définition : Lorsque l'intervalle entre deux sons est égal à 2, on l'appelle une ***octave***.

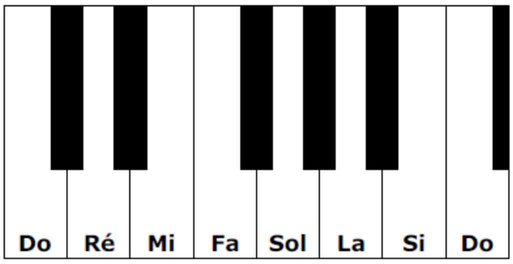
Par exemple : La$_3$ (fréquence 440 Hz) et La$_4$ (fréquence 880 Hz) , ... La$_4$ et La$_3$ sont séparées d'une octave.
Deux notes à l'octave jouées simultanément semblent n'en faire qu'une.
Plus généralement, on parlera d'**harmonie** entre deux notes lorsque le rapport de leur fréquence est « simple » : un entier naturel ou une fraction « simple » d'entiers naturels.

En termes de fréquences, une octave est donc la donnée de deux fréquences dont l'une est le double de l'autre : f et $2f$; on retrouve la notion classique d'intervalle si on note cette octave : $[f;\ 2f[$

L'octave suivante est alors $[2f; 4f[$, puis $[4f; 8f[$, … tandis que l'octave précédente est $[\frac{f}{2}; f[$, puis $[\frac{f}{4}; \frac{f}{2}[$, …

Définition : Une **Gamme** est une suite finie de notes, réparties sur une octave

L'octave est l'intervalle fondamental qui délimite la gamme. C'est l'intervalle qui existe entre le 1er et le 2ème Do dans l'énumération Do Ré Mi Fa Sol La Si Do



La musique occidentale repose sur la notion de gammes, qui définissent les sons que l'on peut employer dans son écriture, puis sur les agencements de ces sons pour construire un assemblage agréable.

II. Gammes de Pythagore

L'objectif pour nous va être de construire des gammes de « Pythagore ». Nous allons diviser une octave en une suite de notes séparées par des intervalles consonants.

Dans l'Antiquité, les seuls nombres connus étaient les nombres rationnels, rapports de deux nombres entiers, et les gammes jusqu'au XVIIe étaient construites sur ces rapports.

Nous allons partir de la note do, de fréquence f (la fréquence de do$_3$ est $f = 261{,}63$ Hz)
Les notes de fréquences $2f$ (correspondant au do$_4$ à l'octave supérieure, plus aigu),mais aussi $3f$, $4f$, $5f$ …
sont consonantes car leurs fréquences sont dans des rapports simples avec la fréquence fondamentale f.
Mais ces fréquences ne sont pas dans l'intervalle $[f; 2f]$, qui est l'octave.
Puisque les notes de fréquence « double » sont consonantes, car elles correspondent à une même note à deux hauteurs différentes, celles de fréquence « moitié » le sont aussi. (autrement dit les notes de fréquence $\frac{f_1}{2}$ et f_1 sont consonantes). Nous allons donc ramener ces notes dans l'octave inférieure en divisant les fréquences obtenues par 2, autant de fois que nécessaire. Ainsi la note de fréquence $3f$, qui est dans l'octave supérieure, n'est pas un do. Donc la note de fréquence $\frac{3}{2}f$ est une nouvelle note de la gamme (elle correspond à la note sol$_3$).

> **Définition :** Une ***quinte*** est un intervalle entre deux **notes** de valeur $\frac{3}{2}$.

Plus généralement, on dit que la note de fréquence f_2 est la **quinte** de la note de fréquence f_1 lorsque $\frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{2}$

Pour définir une nouvelle note, on prend la quinte de la note précédente, et lorsque la fréquence f' obtenue n'appartient pas à $[f; 2f]$, on la divise par 2 autant de fois que nécessaire pour que le résultat appartienne à $[f; 2f]$.
Les gammes de Pythagore sont basées sur ces intervalles de « Quinte » ; en Occident, ces gammes ont été très utilisées jusqu'au XVIIe siècle.

Exercice 1 : Construction d'une gamme

- $f_0 = f$ et $f_1 = \frac{3}{2} \times f = \frac{3}{2}f$ forment une quinte donc on ajoute la note $\frac{3f}{2}$ (dans l'octave $[f; 2f[$) ;
- $\frac{3}{2}f$ et $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}f = \frac{9}{4}f$ forment une quinte, mais $\frac{9}{4} > 2$ donc $\frac{9}{4}f$ n'est pas dans l'octave $[f; 2f[$; la fréquence correspondant à la même note dans l'octave $[f; 2f[$ est la fréquence moitié :
$\frac{9}{4}f \times \frac{1}{2} = \frac{3^2}{2^3}f =$, on ajoute cette note dans l'octave $[f, 2f[$;

1. Compléter le tableau suivant en continuant le calcul des quintes, toujours dans l'octave $[f; 2f[$:

fréquence	f	$\frac{3}{2}f$	$\frac{3^2}{2^3}f$	$\frac{3^3}{2^4}f = \frac{27}{16}f$	$\frac{3^4}{2^6}f = \frac{81}{64}f$	$\frac{3^5}{2^7} = \frac{243}{128}f$	$\frac{3^6}{2^9}f = \frac{729}{512}f$	$\frac{3^7}{2^{11}} = \frac{2187}{2048}f$
intervalle	1	1,5	1,125	1,6875	1.265625	1.8984375	1.423828125	1.06787109375

2. Toutes ces notes ont été normalisées pour se situer dans la même octave, et toutes ces notes vont bien ensemble puisqu'elles respectent l'écart de quinte si naturel. Mais où s'arrête-t-on ?

On constatera une fois le tableau rempli qu'au bout de 5 quintes, on arrive à une fréquence assez proche de l'octave ($2f$) et, au bout de 7 quintes, à une fréquence assez proche de la note initiale (f).

b. Justifier que toutes les fréquences des notes sont de la forme $\frac{3^n}{2^p} f$, n et p entiers naturels.

On passe d'une quinte à la suivante en multipliant par $\frac{3}{2}$ et éventuellement en divisant par 2 (donc en multipliant par $\frac{3}{2^2}$)

c. On obtiendrait un ensemble fini de notes si l'une de ces fréquences était égale à f, et donc s'il existait des entiers n et p tels que $\frac{3^n}{2^p} = 1$. Expliquer pourquoi cette égalité est absurde lorsque n et p sont non nuls.

$$\frac{3^n}{2^p} = 1 \Leftrightarrow 3^n = 2^p$$

Or 3^n est un entier impair tandis que 2^p est pair … : c'est impossible !

Cette spirale des quintes ne reboucle donc jamais.

Si on pousse jusqu'à 12 quintes, on arrive à l'intervalle :

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.0136432647705078125$$

c'est-à-dire qu'on retombe sur une fréquence très proche de la note de départ

$\frac{3^{12}}{2^{19}} f = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} f$ et $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 129{,}7$ et $2^7 = 128$. Ces valeurs sont « proches ».

Si l'on part du Do3 (environ 262 Hz) et qu'on applique le cycle des quintes jusqu'à la 7[e] note, on obtient les notes de la gamme de Do (dans le désordre!) :

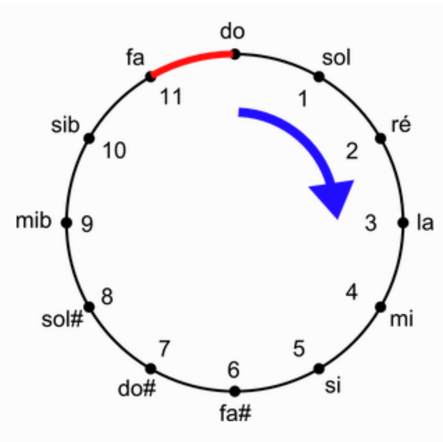
Do	Sol	Ré	La	Mi	Si	Fa
262	393	295	442	330	495	371

Si on poursuit le cycle des quintes jusqu'à la 12[e] note, on obtient 5 notes supplémentaires :
Do# , Ré# , Fa# , Sol# , La#
qui s'intercalent entre Do et Ré, Ré et Mi, Fa et Sol, Sol et La, La et Si

Do-Do#-ré-Ré#-Mi-Fa-Fa#-Sol-Sol#-La-La#-Si-Do

La tradition veut qu'on appelle *gammes de Pythagore* les gammes à 5, 7 ou 12 notes obtenues de cette façon. Elles sont également apparues dans d'autres cultures indépendamment de la culture grecque antique (notamment en Chine).

Les spirales de 7 et 12 quintes « rebouclent » presque. Il est donc intéressant de construire des gammes de 7 ou 12 notes. On parle alors de cycle des quintes, mais l'approximation faite impose que l'une des quintes du cycle soit un peu « fausse » et ne corresponde pas exactement à l'intervalle $\frac{3}{2}$.



On peut ajouter l'exercice suivant sur Pyton ou tableur, qui permet d'obtenir les fréquences des 12 notes de la gamme de Pythagore:

Exercice 2 : A l'aide d'un algorithme ou d'un tableur, déterminer les fréquences successives correspondant aux 12 premières quintes.

```
def gamme12() :
    f=261.63
    f1=f
    gamme=[f]
# on détermine les 12 1ères quintes
    for k in range(1,13):
        f1=f1*1.5
        if f1>2*f:
            f1=f1/2
        gamme=gamme+[f1]
    return gamme
```

```
>>> gamme12()
[261.63, 392.445, 294.33375, 441.500625, 331.12546875, 496.688203125, 372.516152343
75, 279.38711425781247, 419.0806713867187, 314.310503540039, 471.4657553100585, 353
.5993164825439, 265.1994873619079]
```

Commentaires : on peut fournir plus ou moins d'aide pour la réalisation ;

- *Sur tableur, utiliser ou non l'instruction « Si » pour tester si la fréquence obtenue est ou non dans l'intervalle $[f\,;2f]$.*
- *Si on ne dispose pas de poste informatique, on peut réaliser le travail sur calculatrice.*
- *Dans le dossier ressource figurent les fichiers sous Python et sous Excel*
- *On peut imposer que l'algorithme affiche les fréquences triées par ordre croissant avec l'instruction « sorted »*

On peut vérifier qu'au lieu d'utiliser des quintes, on aurait pu utiliser des *quartes* (deux notes dont l'intervalle vaut 4/3), on retrouve alors les mêmes notes car :

$$\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}=2$$

Sur les notes, les opérations « prendre la quinte » et « prendre la quarte » sont donc inverses l'une de l'autre !

Aussi, si l'on veut que la dernière quinte du cycle à 7 notes soit juste, on prendra plutôt pour Fa3 la fréquence 349 Hz (349 ≈ 262 x 4/3), dont l'intervalle avec Do4 est très proche de 3/4. C'est alors la quinte précédente (entre Si et Fa) qui est légèrement fausse.

On appelle cette quinte La quinte du loup

car elle semble "hurler" (à la manière d'un loup) lorsqu'on l'utilise. Et d'ailleurs pour cette raison, on ne l'utilise pas !
Pour l'écouter :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Loup_(musique)

III. Gamme tempérée

Les gammes de Pythagore sont restées très longtemps en usage et ont donné les noms de notes qu'on utilise encore aujourd'hui. Elles ont pourtant deux inconvénients majeurs :

- une des quintes est légèrement fausse, ce qui peut produire des dissonances pour les oreilles averties, et inciter les compositeurs à éviter d'utiliser les notes de cette quinte ensemble (pour ne pas faire entendre cette dissonance) ;
- lorsqu'on souhaite *transposer* un morceau, c'est-à-dire le jouer légèrement plus aigu ou plus grave, par exemple pour l'adapter à la tonalité d'un autre instrument que celui pour lequel il est écrit, on est confronté à des problèmes insolubles, du fait que les intervalles entre les notes des gammes pythagoriciennes ne sont pas tous égaux.

Dans la gamme à 7 notes, il y a deux types d'intervalles, égaux à $\frac{3^2}{2^3}\approx 1{,}12$ pour l'un et à $\frac{2^8}{3^5}\approx 1{,}05$ pour l'autre.

(On peut proposer un exercice visant à faire calculer dans la gamme de Pythagore à 7 notes les intervalles entre 2 notes consécutives
De même pour la gamme à 12 notes, deux intervalles : $2^8 / 3^5$ et $3^7 / 2^{11} \approx 1{,}07$.)

Si on décide de multiplier la fréquence de chaque note d'un morceau par $\frac{3^2}{2^3}$, le Do va devenir Ré, le Ré devenir Mi, le Fa devenir Sol, le Sol devenir La et le La devenir Si mais le Mi ne deviendra pas un Fa ni le Si un Do et on n'aura pas dans la gamme les notes correspondant à cette transposition pour Mi et Si. Si on les remplace par Fa et Do, le résultat sonnera faux…

Pour remédier à cet inconvénient, les musiciens des XVI^e^ et XVII^e^ siècles ont rivalisé d'imagination. Le fait que soient connus et acceptés, à cette époque, les nombres irrationnels (non égaux à un rapport entre deux nombres entiers, par exemple $\sqrt{2}$) leur a permis de proposer des gammes dans lesquelles tous les intervalles sont égaux, en particulier à partir de la gamme de Pythagore à 12 notes, (dans laquelle ils étaient déjà très proches)

On attribue généralement à Andreas Werckmeister l'invention du tempérament égal.

Il s'agit de diviser une octave en douze intervalles égaux.

Le rapport d'octave étant égal à 2, on cherche donc un rapport x tel que $x^{12} = 2$
Car on veut que $f_1 = x \times f_0 = x \times f$; $f_2 = x \times f_1 = x^2 \times f$ etc $f_{12} = x \times f_{11} = x^{12} \times f = 2f$

Définition de la racine douzième de 2.

Soit a un réel positif. Rappeler la définition de $\sqrt{a}$.

C'est le réel positif x tel que $x^2 = a$ ou c'est le nombre réel positif qui élevé à la puissance 2 donne a.

De manière analogue, on peut définir la racine douzième d'un réel positif a.

Définition : Soit a un réel strictement positif. On appelle racine douzième de a, le réel positif x tel que $x^{12} = a$. On le note $a^{\frac{1}{12}}$ ou encore $\sqrt[12]{a}$. Ainsi :

La racine douzième de 2 est le nombre réel positif x tel que $x^{12} = 2$. On le note $x = 2^{\frac{1}{12}}$ ou $x = \sqrt[12]{2}$

C'est le nombre réel positif qui élevé à la puissance 12 donne 2.

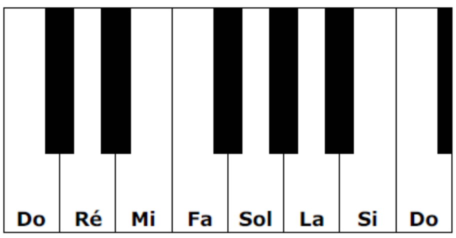
$2^{\frac{1}{12}}$ est l'intervalle définissant le **demi-ton tempéré**.(c'est l'intervalle séparant par exemple Do et Do#)

Sur la calculatrice, on tape 2 ^ (1/12).

Compléter : $2^{\frac{1}{12}} \approx$ …… 1,059 et comparer au demi-ton de la gamme de Pythagore à 7 notes
$\frac{256}{243} \approx$……. 1,053 (arrondir à 10^{-3} près)

Définition. La *gamme tempérée* à 12 notes est construite à partir du La_3, de fréquence 440 Hz, en appliquant des intervalles constants égaux à $2^{\frac{1}{12}}$

Les pianos sont accordés selon la gamme tempérée ; les touches blanches correspondent aux 7 notes provenant de la gamme à 7 notes (Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si), les touches noires correspondent aux 5 notes *diésées* (Do#, Ré#, Fa#, Sol#, La#) qui complètent la gamme à 12 notes.



1. Dans la succession **Do-Do#-Ré-Ré#-Mi-Fa-Fa#-Sol-Sol#-La-La#-Si-Do** quel est l'intervalle entre Do et Ré (nommé le ton tempéré) ?

2. **a.** À l'aide de la valeur approchée de $2^{\frac{1}{12}}$, remplir le tableau des fréquences de la gamme tempérée à 12 notes (même si elles sont un peu modifiées, on garde le même nom pour les notes) en partant du La3 (fréquence 440 Hz) :

Do	Do#	Ré	Ré#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
261	277	294	311	330	349	370	392	415	440	466	494

b. Vérifier pour terminer que l'intervalle entre le double de la fréquence trouvée pour Do et celle de Si est encore égal à $2^{\frac{1}{12}}$

On peut utiliser un tableur, ou un algorithme en Python

b. Comparer avec les valeurs des fréquences obtenues dans l'exercice 2.

dans les exercices suivants, on peut utiliser les propriétés des puissances. (Demander aux élèves de les rappeler)

Exercices complémentaires :

1. Soit $n \in \{0; 1; 2; \dots; 11\}$
   Exprimez à l'aide d'une puissance de 2 et de f la fréquence f_n de toute note dont la fréquence est dans $[f; 2f]$

3. Calculer les intervalles suivants, et les comparer avec les intervalles correspondant dans la gamme de Pythagore :
   a. Do-Sol : la quinte
   b. Do-Fa : la quarte

Ressources :

- **Livre : Maths et musique HS n° 11 Tangente, éditions POLE**
- **Vidéo très claire et complète (avec extraits sonores) :**
  sciencetonnante.wordpress.com/2017/06/06/les-mathematiques-de-la-musique/
- **Site internet assez complet :**
  easyzic.com/dossiers/la-gamme-de-pythagore,h151.html
  easyzic.com/common/datas/dossiers/29/29/pythagore-12-notes.pdf
- **La gamme pythagoricienne et le comma pythagoricien**
  http://images.math.cnrs.fr/+L-harmonie-est-numerique+