

# Probabilités en seconde Les compétences : représenter, chercher, communiquer.

## 1 Le Chevalier Méré (Antoine Gombau), échange différencié sur les travaux de Pascal, Fermat

D'après le compte rendu : Probabilité - un problème historique en classe (journée nationale de Toulouse, 2014) - site APMEP <http://www.apmep.fr/IMG/pdf/P1-20-compte-rendu.pdf>

*Énoncé :*

Deux joueurs  $A$  et  $B$  jouent plusieurs parties de "pile ou face".

Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne. Le premier qui a  $n$  point ( $n$  est un entier naturel) est le vainqueur du jeu et il gagne 64 pistoles.

*Au cours du jeu la partie s'arrête ...*

1. On suppose  $n = 3$  et les deux joueurs  $A$  et  $B$  sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu. Quand ils s'arrêtent,  $A$  a gagné deux parties (elle a donc 2 points) et  $B$  une partie (il a donc 1 point). Avant de se séparer, ils veulent se partager la mise. Quel partage équitable de cette mise proposez-vous ?
2. On suppose  $n = 2$  et les deux joueurs  $A$  et  $B$  sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu. Quand ils s'arrêtent,  $A$  a gagné deux parties (elle a donc 1 points) et  $B$  une partie (il a donc 0 point). Avant de se séparer, ils veulent se partager la mise.
3. On suppose  $n = 5$  et les deux joueurs  $A$  et  $B$  sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu. Quand ils s'arrêtent,  $A$  a gagné deux parties (elle a donc 3 points) et  $B$  une partie (il a donc 2 point). Avant de se séparer, ils veulent se partager la mise.

*Le chevalier de Méré était un noble de la cour de Louis XIV. Selon une lettre de Pascal à Fermat (datant du 29/07/1654), il "avait très bon esprit, mais n'était pas géomètre".*

<http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/94207214.pdf>

## 2 Guider les élèves

1. La réponse de Pacioli : Luca Bartolomes Pacioli OFM, dit Luca di Borgo (vers 1445 à Borgo Sansepolcro en Toscane - entre avril et octobre 1517, probablement dans la même ville<sup>1,2</sup>), est un religieux franciscain, mathématicien et fondateur de la comptabilité.



Wikipedia

On trouve dans le chapitre sur la règle de compagnie notre problème de partage de mise sous la forme suivante : *Une brigade joue à la paume: il faut 70 pour gagner, chaque coup vaut 10. L'enjeu est de 10 ducats. Un incident survient qui force les soldats à interrompre la partie commencée, alors que le premier camp a gagné 50 et le second 20. On demande quelle est la part qui revient à chaque camp.*

...

*La troisième façon est la plus brève. On fait la somme de ce qu'ils ont tous les deux, c'est-à-dire 50 et 20, qui font 70. Et ces 70 gagnent 10. Et de là combien revient à celui qui a 50 et à celui qui a 20 ?*

Le partage proposé ici est un partage proportionnel au nombre de points acquis dans le jeu. Dans l'exercice ça revient à faire un partage en 3. Dans la première situation on obtient 3 points à partager, ainsi  $A$  remporte  $64 \times \frac{2}{3}$  et  $B$  gagne  $64 \times \frac{1}{3}$ .

2. À cette première situation, suit un contre-exemple, la seconde situation.

La réponse de Tartaglia à Pacioli :

Niccolò Fontana dit Tartaglia, né à Brescia en 1499 et mort à Venise le 13 décembre 1557, est un mathématicien italien.



Niccolò Fontana Tartaglia

Wikipedia

*Sa règle ne me parait ni bonne, ni belle, parce que s'il arrive qu'un parti ait 10 [points], et l'autre rien, et qu'on procédât selon sa règle, le premier devrait tirer le tout [toute la mise] et le second rien, ce serait tout à fait déraisonnable que, pour 10 [points], il doive tirer le tout.*

En effet, avec la réponse de Pacioli dans la deuxième situation, *B* n'a rien et *A* a tout alors qu'en terme de probabilité, si la partie continuait jusqu'au bout, *B* a encore des chances gagner.

Une idée de Jérôme Cardan (Pavie, 24 septembre 1501 - Rome, 21 septembre 1576) (en italien : Gerolamo Cardano ou Girolamo Cardano, en latin : Hieronymus Cardanus), est un mathématicien, un philosophe, un astrologue, un inventeur et un médecin italien.



Autoportrait de Jérôme Cardan.

Il faut considérer les points non acquis plutôt que les nombres acquis.

3. Les échanges entre Pascal et Fermat.

Blaise Pascal, né le 19 juin 1623 à Clermont (aujourd'hui Clermont-Ferrand), en Auvergne, mort le 19 août 1662 à Paris, est un mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français.



Blaise Pascal (anonyme, 2<sup>e</sup> ou 3<sup>e</sup> quart du xvi<sup>e</sup> siècle, Château de Versailles).

Wikipédia

Pierre de Fermat, né dans la première décennie du xvii<sup>e</sup> siècle<sup>1</sup>, à Beaumont-de-Lomagne (département actuel de Tarn-et-Garonne), près de Montauban, et mort le 12 janvier 1665 à Castres (département

actuel du Tarn)<sup>2,3</sup>, est un magistrat, polymathe et surtout mathématicien français, surnommé le prince des amateurs. Il est aussi poète, habile latiniste et helléniste, et s'est intéressé aux sciences et en particulier à la physique ; on lui doit notamment le principe de Fermat en optique. Il est particulièrement connu pour avoir énoncé le dernier théorème de Fermat, dont la démonstration n'a été établie que plus de 300 ans plus tard par le mathématicien britannique Andrew Wiles en 1994.



Extrait de la lettre de Pascal à Fermat le 29 juillet 1654 :

**TABLE**  
 DONT IL EST FAIT MENTION DANS LA LETTRE PRÉCÉDENTE  
 (de Pascal à Fermat , 29 juillet 1654)  
*Si on joue chacun 256, en*

	6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour la 1 <sup>re</sup> Partie.	63	70	80	96	128	256
2 <sup>e</sup> Partie.	63	70	80	96	128	
3 <sup>e</sup> Partie.	56	60	64	64		
4 <sup>e</sup> Partie.	42	40	32			
5 <sup>e</sup> Partie.	24	16				
6 <sup>e</sup> Partie.	8					

Tableau S

*Si on joue 256, chacun, en*

	6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour La 1 <sup>re</sup> Partie.	63	70	80	96	128	256
Les 2 1 <sup>res</sup> Parties.	126	140	160	192	256	
Les 3 1 <sup>res</sup> Parties.	182	200	224	256		
Les 4 1 <sup>res</sup> Parties.	224	240	256			
Les 5 1 <sup>res</sup> Parties.	248	256				
Les 6 1 <sup>res</sup> Parties.	256					

Tableau T

Lettre de Pascal à Fermat, du 24 août 1664:

*Voici comment vous procédez quand il y a deux joueurs:*

*Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque deux parties au premier et trois au second, pour trouver le parti, il faut, dites-vous, voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.*

*Il est aisé de supputer que ce sera en quatre parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours, si je ne l'eusse su de moi-même auparavant; aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisque'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties); et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer: ils en peuvent avoir seize...*

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

*Je communiquai votre méthode à nos Messieurs, sur quoi M. de Roberval me fit cette objection : Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en quatre parties, vu que, quand il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue quatre parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que deux ou trois, ou à la vérité peut-être quatre; Et ainsi qu'il ne voyoit pas pourquoi on prétendoit de faire le parti juste sur une condition feinte qu'on jouera quatre parties, vu que la condition naturelle du jeu est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné, et qu'au moins, si cela n'étoit faux, cela n'étoit pas démontré, de sorte qu'il avoit quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme.*

*... Je lui démontrai la vérité du parti entre deux joueurs par les combinaisons en cette sorte:*

*N'est-il pas vrai que si deux joueurs se trouvent en cet état de l'hypothèse qu'il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, conviennent maintenant de gré à gré qu'on joue quatre parties complètes ..., le parti doit être, tel que nous avons dit ... ?*

*Il en demeura d'accord et cela en effet est démonstratif; mais il nioit que la même chose subsistât en ne s'astreignant pas à jouer les quatre parties.*

*Je lui dis donc ainsi:*

*N'est-il pas clair que les mêmes joueurs, n'étant pas astreints à jouer jles; quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un auroit atteint son nombre, peuvent sans dommage ni avantage s'astreindre à jouer les quatre parties entières et que cette convention ne change en aucune manière leur condition ?*

*Car, si le premier gagne les deux premières parties de quatre et qu'ainsi il ait gagné, refusera-t-il de jouer encore deux parties, vu que, s'il les gagne, il n'a pas mieux gagné, et s'il les perd, il n'a pas moins gagné ? Car ces deux que l'autre a gagné ne lui suffisent pas, puisqu'il lui en faut trois, et ainsi il n'y a pas assez de quatre parties pour faire qu'ils puissent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.*

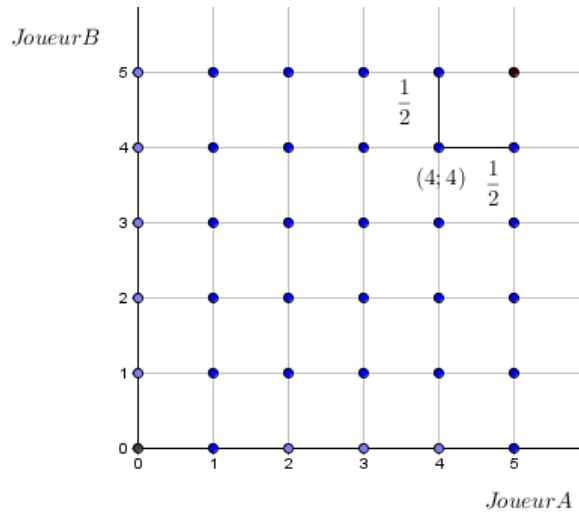
*Certainement il est aisé de considérer qu'il est absolument égal et indifférent à l'un et à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu, qui est de finir dès qu'un aura son compte, ou de jouer les quatre parties entières: donc, puisque ces deux conditions sont égales et indifférentes, le parti doit être tout pareil en l'une et en l'autre. Or, il est juste quand ils sont obligés de jouer quatre parties, comme je l'ai montré: donc il est juste aussi en l'autre cas.*

*Voilà comment je le démontrai et, si vous y prenez garde, cette démonstration est fondée sur l'égalité des deux conditions, vraie et feinte, à l'égard de deux joueurs, et qu'en l'une et en l'autre un même gagnera toujours et, si l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre et jamais deux n'auront leur compte.*

vers une solution du problème :

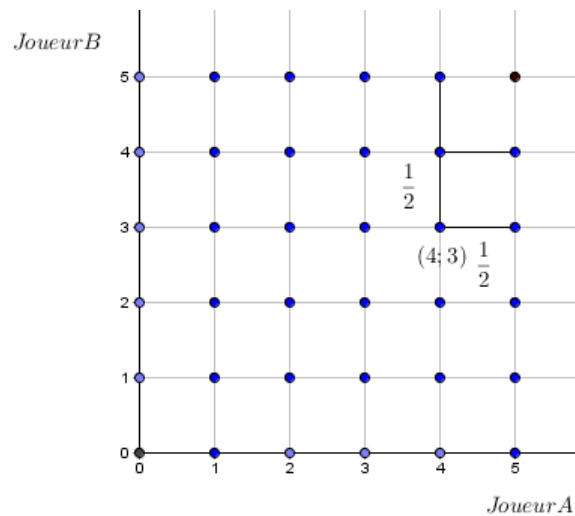
On note le couple  $(a ; b)$  les points respectifs du joueur  $A$  et  $B$ . Ici on veut résoudre le partage  $(3 ; 2)$ .  
 On note  $m$  la mise de chaque joueur ( $m = 32$ ), les joueurs peuvent gagner jusqu'à  $2m$ .

(a) Supposons le couple  $(4 ; 4)$ .



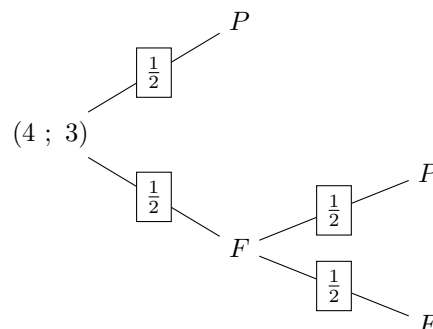
Il est évident qu'à ce niveau du jeu, chaque joueur a une chance sur deux de gagner la partie, il se répartiront la mise, chacun remporte  $m$ .

(b) Supposons le couple  $(4 ; 3)$ .



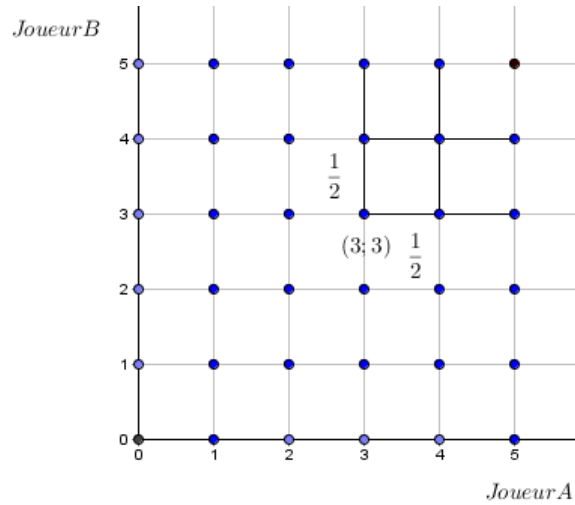
Le joueur  $A$  a une avance. Soit il gagne au coup suivant, soit on retrouve la configuration précédente. Sur le schéma ci-dessus, trois chemins pondérés mènent à la fin du jeu dont deux pour le joueur  $A$ ,  $A$  reçoit  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) 2m$  soit  $\frac{3}{4} 2m$  soit  $\frac{3}{2} m$  et  $B$  reçoit  $\frac{1}{4} 2m$  soit  $\frac{m}{2}$ .

on peut représenter l'arbre pondéré de probabilité suivant :



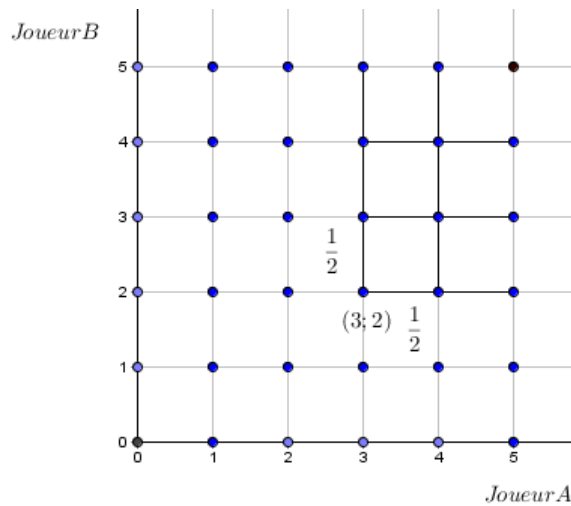
Cette configuration est celle de la deuxième question.

(c) On suppose le couple (3 ; 3) :



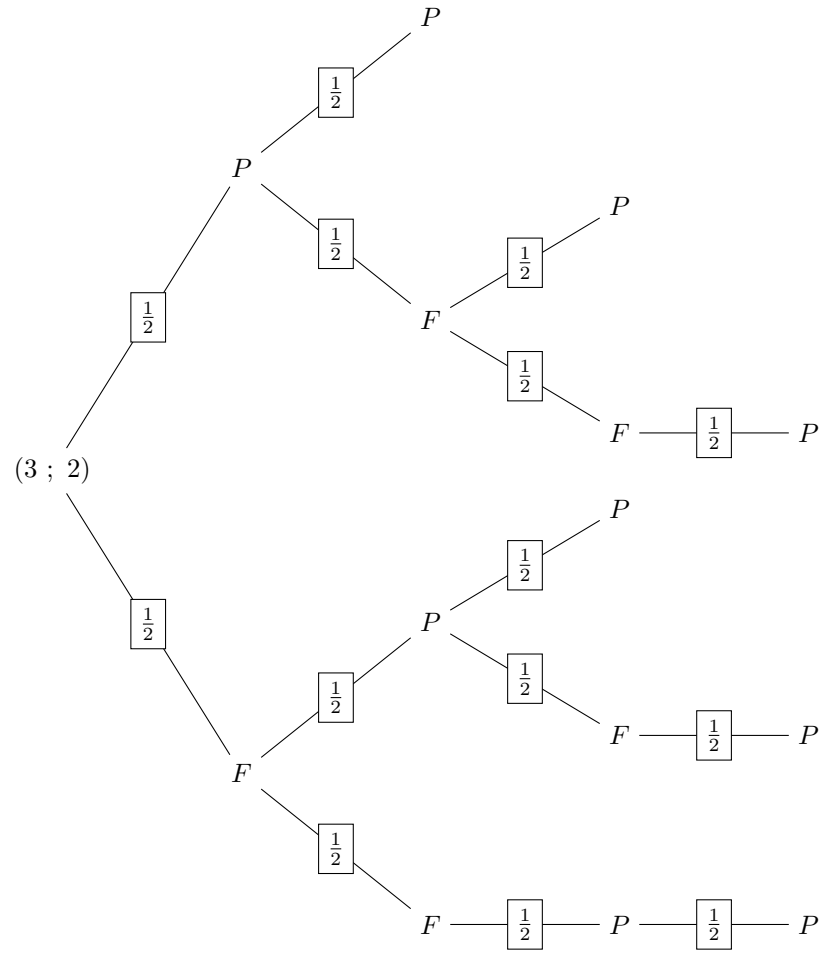
On constate que si  $a = b$  le partage est  $m$  pour chaque joueur.

(d) On suppose le couple (3 ; 2) :

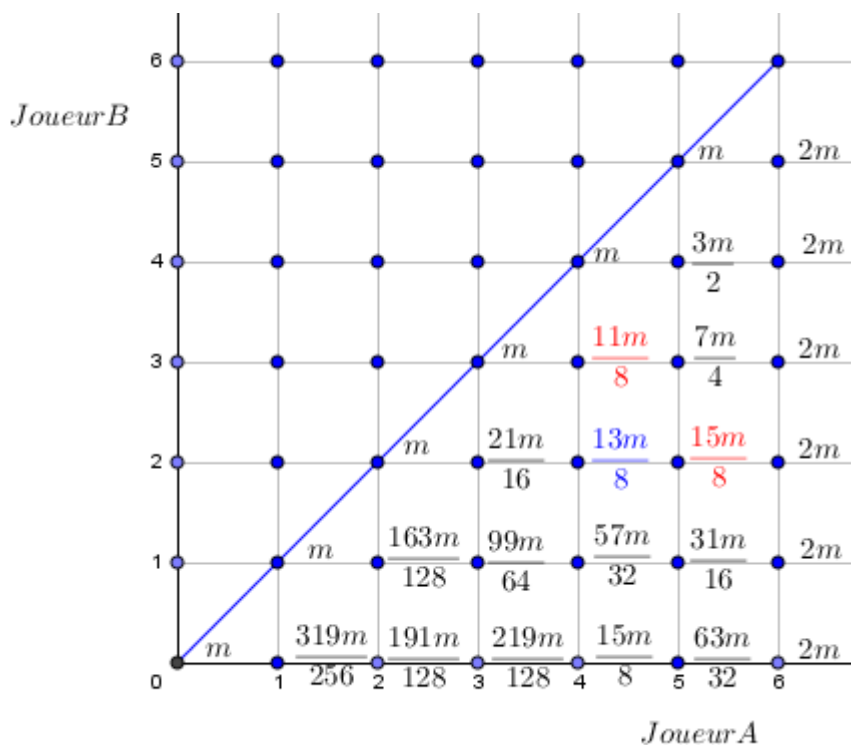


Le schéma et l'arbre ci-après mettent en évidence le résultat :

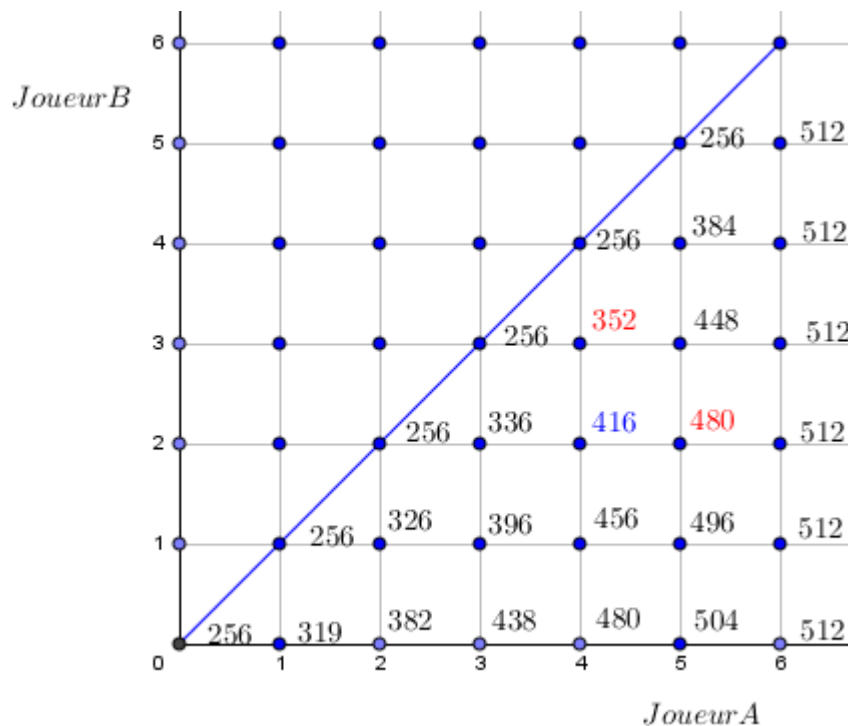
- le joueur  $A$  recevra  $\left(\frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{16}\right) 2m$  soit  $\frac{11}{16} 2m$  soit  $\frac{11}{8} m$ .
- Le joueur  $B$  reçoit  $\frac{5}{8} m$ .



Le graphique suivant donne la répartition des gains du joueur  $A$  pour 6 parties pour chaque couple  $(a ; b)$  :

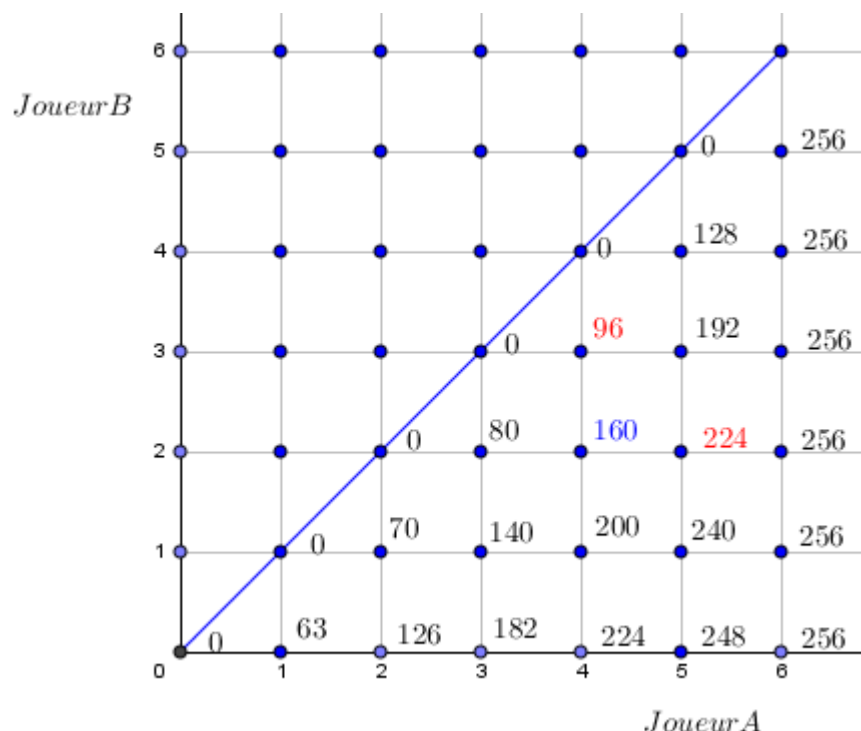


On en déduit la répartition des gains du joueur  $A$  pour 6 parties pour chaque couple  $(a ; b)$  :



Puis la répartition des gains réels du joueur  $A$  pris sur le joueur  $B$ .





Ce tableau est la tableau  $\mathcal{T}$  obtenu par Pascal dans son échange avec Fermat.

voir aussi LE PROBLÈME DES PARTIS BOUGE... DE PLUS EN PLUS de Norbert Meusnier, Université de Paris VIII [http://www.jehps.net/Juin2007/Meusnier\\_partis.pdf](http://www.jehps.net/Juin2007/Meusnier_partis.pdf) **notamment sa représentation par un arbre très efficace !**

L'arbre du le document de N.Meusnier décrit très bien la situation suivante : Si on considère une situation où le jeu s'arrête à un coup de la fin de la partie initialement décidé (si  $n = 6$  on s'arrête à 5 coups).

supposons le couple (5 ; 4), le joueur A n'est plus qu'à un seul coup de la victoire et le joueur B à deux coups de la victoire.

Si A gagnait le coup suivant il remporte  $2m$  et s'il perdait ce coup il remporte  $m$  (on est au couple (5 ; 5)). Ainsi, au coup suivant, le joueur A remporte au maximum  $2m$  et au minimum  $m$ , le joueur B remporte au maximum  $m$  et au minimum 0. Les joueurs peuvent se mettre d'accord sur  $\frac{3m}{2}$

pour le joueur A et  $\frac{m}{2}$  pour le joueur B sur la position du couple (5 ; 4), qui correspond à un gain réel de 128 pour le joueur A.

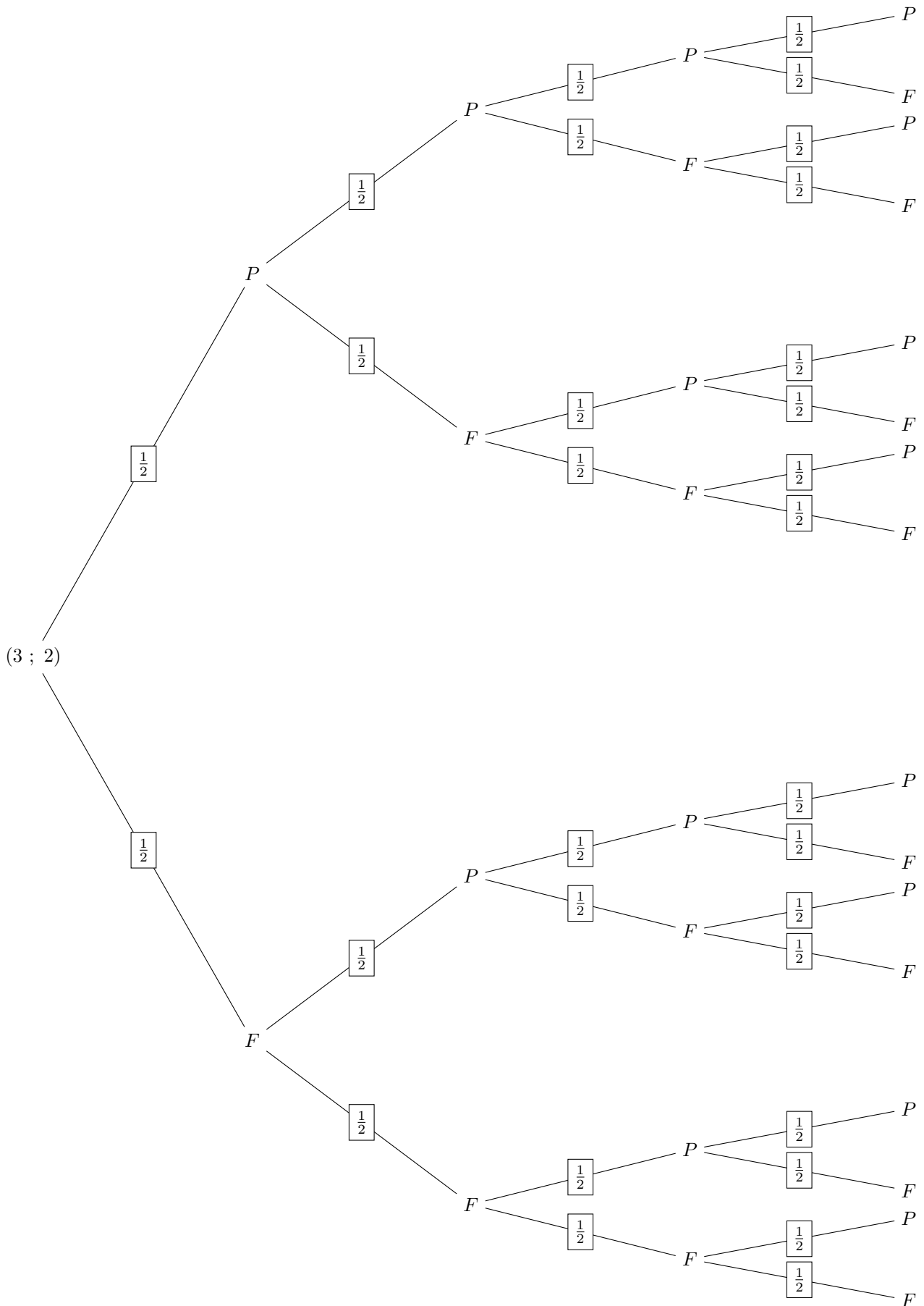
En remontant ce principe on obtient la propriété illustrée dans les graphiques : le nombre en bleu s'obtient en faisant la demi-somme des nombres en rouge. Ce principe permet de construire plus rapidement l'ensemble des graphiques proposés, le dénombrement étant plus long.

On peut alors proposer un algorithme qui détermine le gain réel du joueur A (par symétrie on a le gain réel du joueur B) suivant la valeur de  $n$  fixée au début de l'expérience et le couple (a ; b) qui donne le nombre de victoires de A et B (on supposera  $a > b$ ).

### 3 Algorithme

#### 3.1 Algorithme de dénombrement

Si on reprend l'arbre proposé pour  $n = 5$  et le couple (3 ; 2). Il reste 2 coups à A pour gagner la partie alors qu'il reste 3 coups à B pour gagner la partie. Dans la lettre à Fermat, Pascal nous dit que ça revient à jouer 4 parties. En effet nous pouvons compléter les branches de l'arbre et à l'issue de chaque chemin le joueur A gagne si P est apparu deux fois avant que F n'apparaisse trois fois. Il y a donc seize ( $2^4$  chemins possibles de l'arbre dans lequel on compte les parties gagnées par chaque joueur).



Pour  $n$  donné et un couple  $(a ; b)$  la partie s'arrête au bout de  $n - a + n - b - 1$  coups, soit  $2n - a - b - 1$ .

Pour  $n = 5$  et le couple  $(3 ; 2)$  donne  $2 \times 5 - 3 - 2 - 1 = 4$  parties restantes à deux issues chacune soit  $2^4$  chemins de l'arbre.

### 3.1.1 Avec le tableau (avec ou sans formule retrouver le tableau de Pascal)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		16	8	4	2	1	vainqueur	
2	1	P	P	P	P		A	0,0625
3	2	P	P	P	F		A	0,0625
4	3	P	P	F	P		A	0,0625
5	4	P	P	F	F		A	0,0625
6	5	P	F	P	P		A	0,0625
7	6	P	F	P	F		A	0,0625
8	7	P	F	F	P		A	0,0625
9	8	P	F	F	F		B	0
10	9	F	P	P	P		A	0,0625
11	10	F	P	P	F		A	0,0625
12	11	F	P	F	P		A	0,0625
13	12	F	P	F	F		B	0
14	13	F	F	P	P		A	0,0625
15	14	F	F	P	F		B	0
16	15	F	F	F	P		B	0
17	16	F	F	F	F		B	0
18							part des gains pour A	0,6875
19					mise	256	gain	352
20							gain réel	96
21	Formules	en E2	"=SI(ET(MOD(\$A2;E\$1)<=F\$1;MOD(\$A2;E\$1)>=1),"P";"F")"					
22		en G2	"=SI(NB.SI(B2:E2;"F")>=3;"B";"A")"					
23		en H2	"=SI(G2="A";0,5^4;0)"					
24		en G19	"=SOMME(H2:H17)"					
25		en H19	"=H18*2*F19"					
26		en H20	« =H19-256					

## 3.2 Avec Python

```

1 #algorithme des partis, par dénombrement dans le cas d'une victoire du joueur A
2
3
4 from math import*
5
6 #####fonctions
7
8 def initialisation(N):
9     S=[]
10    for i in range(0,int(pow(2,N))): #initialisation de la table de dénombrement
11        S0=[]
12        for j in range(0,N):
13            S0.append(0)
14        S.append(S0)
15    return S
16
17 def valeur(i,j): #donne pile ou face suivant
18     if i%j>=1 and i%j<=j/2:
19         return "P"
20     else :
21         return "F"
22
23 def couple(a,b):
24     global S,n
25     N=2*n-a-b-1 #nombre de parties restantes.
26     S=initialisation(N)
27     for i in range(0,int(pow(2,N))): #dans l'exemple i varie entre 0 et 4 compris
28         for j in range(0,N):
29             S[i][j]=valeur(i+1,pow(2,N-j))
30
31     #print("liste de Pascal : ",S)
32
33     i=0
34     K=int(pow(2,N))
35     while i < K:#retirer les listes de S en faveur de B
36         if S[i].count("F")>=n-b:
37             K=K-1

```

```

36         S.remove(S[i])
37         i=i-1
38     i=i+1
39     #print("liste de Pascal en Faveur de A :",S)
40     return len(S)/pow(2,N)
41
42 def affichage_couple(a,b):
43     global n,m
44     N=2*n-a-b-1 #nombre de parties restantes.
45     probabilite=couple(a,b)
46     print("probabilité favorable à A pour le couple (" ,a,";" ,b,") :",probabilite)
47     print("gain pour une mise de " ,m," on trouve : " ,probabilite*2*m)
48     print("gain réel pour une mise de " ,m," on trouve : " ,probabilite*2*m-m)
49
50 def affichage_tableau_T():
51     for i in range(1,n+1):
52         for j in range(0,i):
53             probabilite=couple(i,j)
54             print(probabilite*2*m-m)
55
56 #####programme principal
57 #####variable du problème
58 n=6 #nombre de parties initialement prévues
59 m=256 #mise de chacun des joueurs
60 #####couple
61 affichage_couple(4,3)
62 #####tableau T
63 affichage_tableau_T()

```

algo2denombrement.py

On obtient le résultat suivant :

liste de Pascal : [['P', 'P', 'P', 'P'], ['P', 'P', 'P', 'F'], ['P', 'P', 'F', 'P'], ['P', 'P', 'F', 'F'], ['P', 'F', 'P', 'P'], ['P', 'F', 'P', 'F'], ['P', 'F', 'F', 'P'], ['F', 'P', 'P', 'P'], ['F', 'P', 'P', 'F'], ['F', 'P', 'F', 'P'], ['F', 'P', 'F', 'F'], ['F', 'F', 'P', 'P'], ['F', 'F', 'P', 'F'], ['F', 'F', 'F', 'P'], ['F', 'F', 'F', 'F']]  
 liste de Pascal en Faveur de A : [['P', 'P', 'P', 'P'], ['P', 'P', 'P', 'F'], ['P', 'P', 'F', 'P'], ['P', 'P', 'F', 'F'], ['P', 'F', 'P', 'P'], ['P', 'F', 'P', 'F'], ['P', 'F', 'F', 'P'], ['F', 'P', 'P', 'P'], ['F', 'P', 'P', 'F'], ['F', 'P', 'F', 'P'], ['F', 'P', 'F', 'F'], ['F', 'F', 'P', 'P'], ['F', 'F', 'P', 'F'], ['F', 'F', 'F', 'P'], ['F', 'F', 'F', 'F']]  
 probabilité favorable à A pour le couple ( 4 ; 3 ) : 0.6875  
 gain pour une mise de 256 on trouve : 352.0  
 gain réel pour une mise de 256 on trouve : 96.0  
 Et les valeurs du triangle  $\mathcal{T}$

### 3.3 Avec la propriété de la moyenne

#### 3.3.1 Avec le tableau

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	6							0	
2	5						0	256	
3	4					0	128	256	
4	3				0	96	192	256	
5	2			0	80	160	224	256	
6	1		0	70	140	200	240	256	
7	0	0	63	126	182	224	248	256	
8		0	1	2	3	4	5	6	
9									
10									
11		Formule en G3		"=(H3+G2)/2					
12									

### 3.3.2 Algorithme en Python

```

1 #algorithme Pascal à Fermat moyenne des couples
2
3 #def gain_pascal(n,a,b):
4
5 n=6
6 m=256
7 S=[]
8 for i in range (0,n+1): #initialisation de la table T
9     S0=[]
10    for j in range(0,i+1):
11        S0.append(0)
12    S.append(S0)
13 for i in reversed(range(0,n+1)):
14    for j in reversed(range(0,i+1)):
15        if i==n:
16            if j==i:
17                S[i][j]=0
18            else:
19                S[i][j]=m
20        if j<i and i!=n:
21            S[i][j]=(S[i+1][j]+S[i][j+1])/2
22 print(S)

```

algo1.py

On obtient :  $[[0], [63.0, 0], [126.0, 70.0, 0], [182.0, 140.0, 80.0, 0], [224.0, 200.0, 160.0, 96.0, 0], [248.0, 240.0, 224.0, 192.0, 128.0, 0], [256, 256, 256, 256, 256, 256, 0]]$

## 4 Différenciation

### 4.1 Structure

Reprenons le problème :

*Énoncé :*

Deux joueurs *A* et *B* jouent plusieurs parties de " pile ou face".

Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne. Le premier qui a *n* point (*n* est un entier naturel) est le vainqueur du jeu et il gagne 64 pistoles.

*Au cours du jeu la partie s'arrête ...*

*Remarque : Cet énoncé peut être proposé sans question*

Les élèves peuvent simuler quelques parties pour bien se rendre compte du problème.

La simulation peut-être manuelle ou numérisée par exemple à partir de la calculatrice.

Comment partager les gains ?

### 4.2 Contenus

Le problème ouvert se referme au fur et à mesure que les élèves entre dans le problème :

- Toutes les règles sont permises (par exemple : celui qui a remporté la dernière partie a gagné la totalité des gains).
- Interroger les élèves sur un partage équitable, la somme peut se diviser en fonction des parties déjà jouées : c'est l'approche de Pacioli.
- Si on s'intéresse aux parties qui ne sont pas jouées (Tartaglia - Cardan) on trouve une règle qui semble plus équitable.  
La question a duré plus de 100 années, nos élèves ont au plus deux séances pour en comprendre les principes...  
Toute la réponse est dans l'analyse des échanges de Pascal à Fermat et les tableaux notamment le tableau  $\mathcal{T}$ .  
Dès lors on peut refermer le problème en proposant :

– les textes des échanges

- des coups de pouces pour comprendre les constructions, les représentations sont largement favorisées.
- Pour l'obtention du tableau  $\mathcal{T}$  on peut le faire à la main, en programmant un algorithme ou avec le tableur.

*Remarque* : l'approche par la propriété de la moyenne est beaucoup plus abordable, des élèves plus fragiles peuvent plus facilement s'approprier cette méthode de construction.

### 4.3 Processus

Les différentes approches des élèves et historiques du problème forment les processus, la façon d'appréhender le problème.

Les différentes approches pour résoudre le problème par les différents modes permettent de répondre à la question.

### 4.4 Production

Chaque élève (ou binôme) doit savoir obtenir le tableau  $\mathcal{T}$  de l'échange de Pascal à Fermat. Pour se faire il aura utiliser une construction (à l'aide d'arbres ou de schémas) guidée par l'enseignant.

Un exposé par binôme peut être réalisé :

- Présentation des Mathématiciens qui ont travaillé sur le sujet.
- L'obtention du tableau  $\mathcal{T}$ .