

## Compétence **modéliser-communiquer** : probabilités

### Exercice 1 :

Soit deux urnes qui contiennent des boules.

- La première contient 20 boules noires et 30 rouges
- La seconde en a vingt 25 boules noires et 25 boules rouges.

On tire sans préférence particulière une des urnes au hasard et dans cette urne, on tire une boule au hasard. La boule est rouge. De quelle urne provient-elle ?

### Exercice 2 : application à la médecine, d'après le site <http://www.mountvernon.fr>

Définitions médicales d'un test de diagnostic médical :

- Pour un patient testé :
  - Soit P l'observation : le test est positif
  - Soit M l'hypothèse : le sujet est malade
- Caractéristiques connues et fournies avec le test :
  - Sensibilité (Se) : probabilité pour qu'un test réalisé sur une personne malade se révèle positif
  - Spécificité (Sp) : probabilité pour qu'un test réalisé sur une personne saine se révèle négatif
- Pour un sujet donné, caractéristiques recherchées :
  - Valeur prédictive positive (VPP): probabilité pour que le patient, dont le test est positif, soit effectivement malade
  - Valeur prédictive négative (VPN): probabilité pour que le patient, dont le test est négatif, ne soit pas malade
- Une donnée nécessaire au calcul bayésien :
  - Prévalence ( $p$ ) : proportion observée de la maladie dans la population considérée (nombre de malades pour 1000 personnes de même catégorie par ex : fumeurs de moins de 50 ans)

***Le problème posé à 160 gynécologues en France source : Gigerenzer et al. Helping doctors and patients make sense of health statistics (2007) :***

Estimer la probabilité pour qu'une femme soit atteinte d'un cancer du sein en sachant qu'elle avait un test de dépistage positif.

Il était précisé qu'elle appartenait à une population dans laquelle la prévalence de ce cancer était de 1 % , et que le test de dépistage avait une sensibilité et une spécificité de 90 %.

(les deux tiers des gynécologues interrogés ont répondu 90 %)

Après avoir fait les deux exercices :

Faire varier les paramètres de la modélisation permet de faire de la différenciation.

La remise en question naturelle du modèle de l'exercice 2 (la probabilité qu'une femme ayant un test positif soit effectivement atteinte du cancer du sein est faible).

## 1 Contenus :

La différenciation par les contenus est naturelle. Au moins deux questions se posent :

- Pour quelle prévalence  $p$  dépasse-t-on un seuil donné ? (par exemple 50%)

### Exercice 3 :

Reprendre l'exercice précédent :

Pour quelle valeur de prévalence  $p$  a-t-on  $VPP > 0,5$  ? Interpréter le résultat.

- Si la prévalence  $p$  reste la même et si le test reste le même, combien de tests sont nécessaires (sur la population positive au test) pour obtenir un seuil raisonnable de la probabilité attendue.

**Exercice 4 :**

On reprend d'exercice 2.

On souhaite améliorer la fiabilité du test  $T_1$  de l'exercice 2. On choisit une population des femmes qui ont eu le test positif et on fait un deuxième test  $T_2$ . Sur ce test on considère que sa sensibilité et sa spécificité est de 90 %.

Parmi les femmes qui ont eu un test positif, on refait un troisième test  $T_3$  qui a la même sensibilité et la même spécificité 90 %. On procède ainsi jusqu'à  $n$  test  $T_n$  jusqu'à obtenir  $VPP > 0,875$ .

En considérant l'**indépendance** entre chaque test, Combien de tests sont nécessaires ?

Pour ces exercices 3 et 4, on peut demander de faire un exercice au choix ou les deux.

## 2 Structure

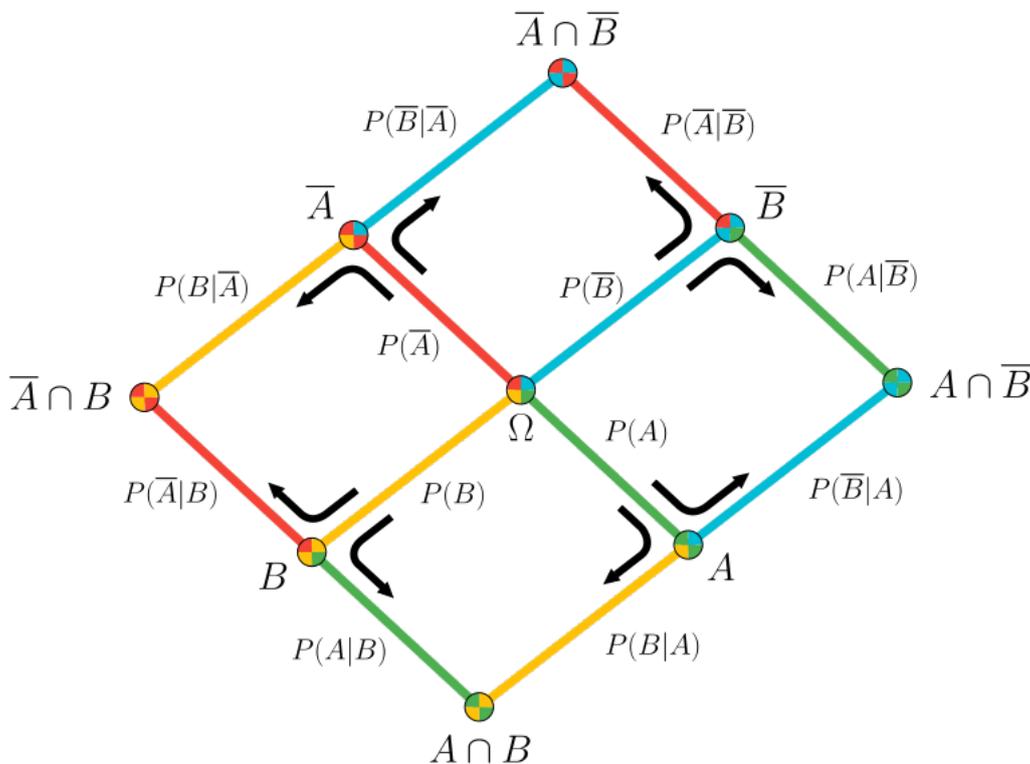
La recherche des exercices 1 et 2 peuvent se faire en classe entière.

La remise en question du modèle, les exercices 3 et 4 peuvent se faire en binôme (rassembler les connaissances, trouver des stratégie de recherche etc...). L'exercice(s) est engagé durant la séance.

## 3 Processus

Différentes approches sont possibles, autant d'approches permettant la différenciation par processus (Schémas, lectures graphiques, organisation sur tableur, algorithmes etc...)

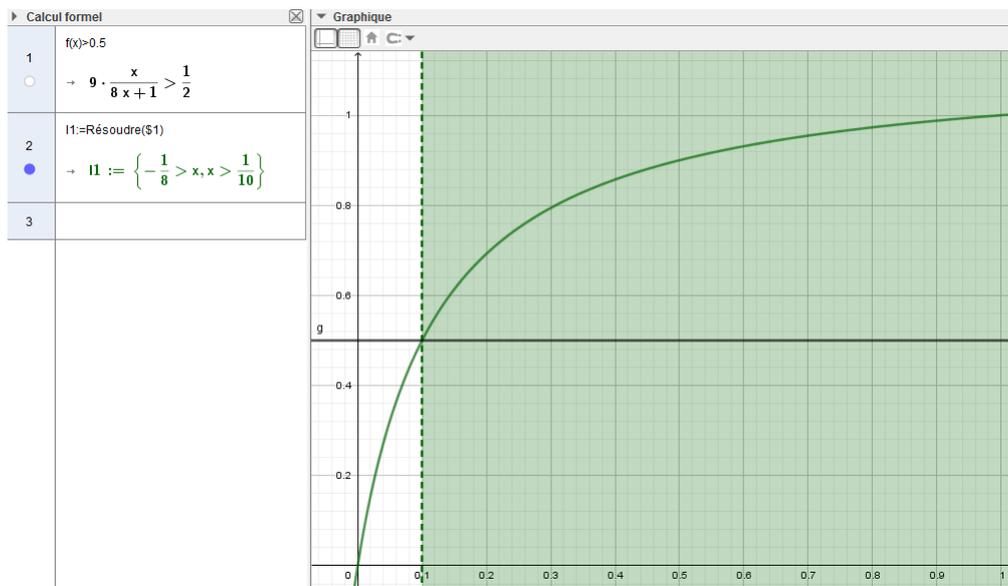
### 3.1 exemple de schéma



$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Wikipedia

### 3.2 exercice 3 : exemple de représentation graphique et de calcul formel sur GeoGebra



### 3.3 exercice 4 : exemple d'algorithme et composition de fonction

```

1 #bayes tests consécutifs de même spécificité et de même sensibilité :
2 # sensibilité et spécificité de 90%
3 # p=0.01 pour le premier test
4 # n nombre de tests
5
6 from math import*
7
8 def f(x): #probabilité de Bayes
9     return 0.9*x/(0.8*x+0.1)
10
11
12 def g(n,x): #fonction récursive pour composer les fonctions
13     if n==0 :
14         return (f(x))
15     else :
16         return f(g(n-1,x))
17
18
19 p=0.01
20 n=1 #initialisation du nombre de test
21 print("f_ ",n, "(0.01)=" ,g(n-1,p))
22 K=0.875 #seuil souhaité dans le modèle
23 while g(n-1,p)<K :
24     n=n+1
25     print("f_ ",n, "(0.01)=" ,g(n-1,p))

```

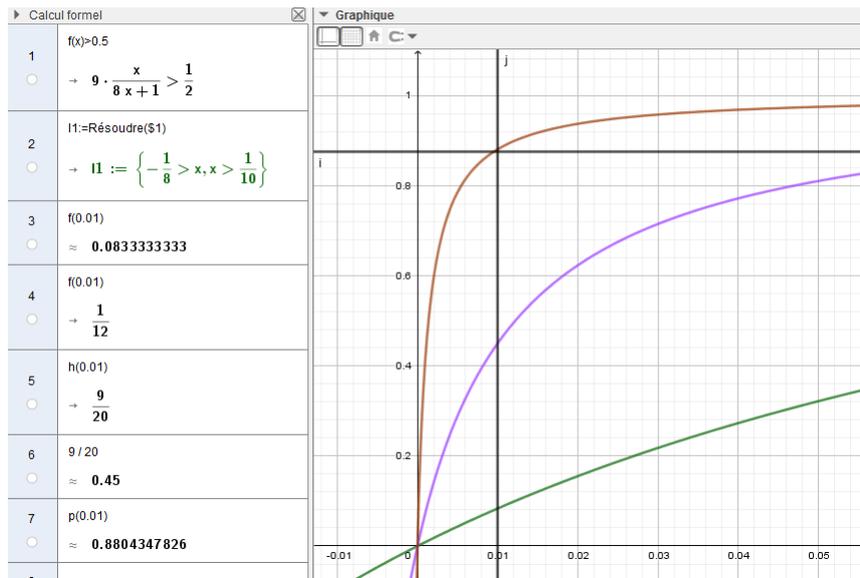
AP\_competence\_modeliser\_probabilite.py

donne le résultat suivant :

$$f_1(0.01) = 0.08333333333333333$$

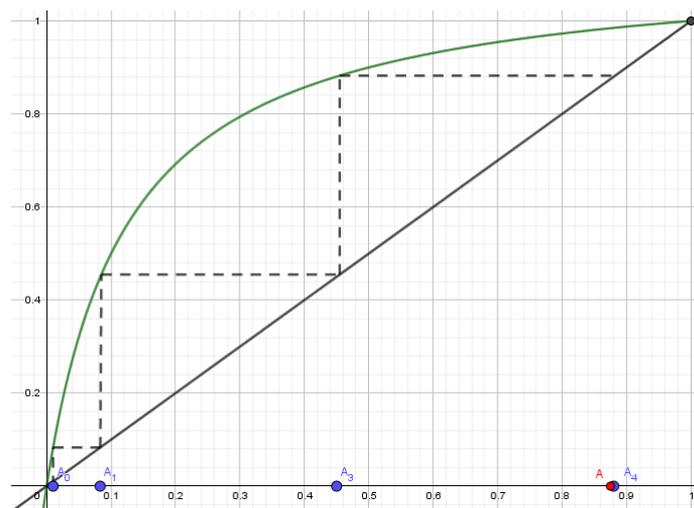
$$f_2(0.01) = 0.44999999999999996$$

$$f_3(0.01) = 0.8804347826086957$$



### 3.4 exercice 4 : exemple d’algorithme et de suites

On définit la suite  $(u_n)$  telle que  $u_0 = 0,01$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f(x) = \frac{0,9x}{0,8x + 0,1}$ .



```

1 #bayer tests consécutifs de même spécificité et de même sensibilité :
2 # sensibilité et spécificité de 90%
3 # p=0.01 pour le premier test
4 # n nombre de tests
5
6 from math import*
7
8 def f(x): #probabilité de Bayes
9     return 0.9*x/(0.8*x+0.1)
10
11 p=0.01
12 u=p #initialisation de u à la prévalence
13 n=0 #initialisation du nombre de test
14 K=0.875 #seuil souhaité dans le modèle
15 while u<K :
16     n=n+1
17     u=f(u)
18     print("f_ ",n,"(0.01)=",u)

```

AP\_competence\_modeliser\_probabilite\_2.py

Donne le résultat suivant :  
 $f_1(0.01) = 0.08333333333333333$

$$f_2(0.01) = 0.44999999999999996$$

$$f_3(0.01) = 0.8804347826086957$$

## 4 Production

Présentation des travaux de quelques binômes à la classe : réalisation d'un diaporama expliquant les démarches.

On peut aussi engager un travail (personnel) de recherche sur des médias à propos du Pasteur-Mathématicien Thomas Bayes (né env. en 1702 à Londres - mort le 7 avril 1761 à Tunbridge Wells) connu pour avoir formulé le théorème de Bayes.

Sa formule a de nombreuses applications : pour prendre des décisions au centre anti-poison, dans l'intelligence artificielle etc...

voir 2 exemples de productions d'élèves.

Grille d'évaluation :

| compétence<br>Modéliser                                   | maîtrise<br>insuffisante | maîtrise<br>fragile | maîtrise<br>satisfaisante | très bonne maîtrise | non évaluée |
|---|--------------------------|---------------------|---------------------------|---------------------|-------------|
| utiliser des schémas/tableaux<br>(compétence représenter) |                          |                     |                           |                     |             |
| comprendre les paramètres<br>du modèle                    |                          |                     |                           |                     |             |
| Capacités à faire<br>varier les paramètres du modèle      |                          |                     |                           |                     |             |

| compétence<br>Communiquer                     | maîtrise<br>insuffisante | maîtrise<br>fragile | maîtrise<br>satisfaisante | très bonne maîtrise | non évaluée |
|---|--------------------------|---------------------|---------------------------|---------------------|-------------|
| Expliquer des démarches<br>un modèle<br>écrit |                          |                     |                           |                     |             |
| Expliquer des démarches<br>un modèle<br>oral  |                          |                     |                           |                     |             |
| Qualité de l'expression<br>écrite             |                          |                     |                           |                     |             |
| Qualité de l'expression<br>orale              |                          |                     |                           |                     |             |
| Développer sa curiosité                       |                          |                     |                           |                     |             |