Démonstrations
$\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal
Les compétences : représenter, raisonner, chercher, communiquer.

1 Définitions d'un nombre décimal :

Définition d'un nombre décimal : Un nombre décimal est un nombre réel qui a un nombre fini de chiffres après la virgule . En tant que définition, elle comporte un " si et seulement si " implicite. Une définition caractérise l'objet qu'elle définit. (faux)

En effet $0,99999... = 1$ est un nombre décimal et il admet une écriture décimale avec une infinité de chiffre après la virgule.

Démonstration 1 :
Soit le nombre réel $x = 0,9999.... = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i}$.
$10 \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{10^i} = 9 + \sum_{i=2}^{n} \frac{9}{10^{i-1}} = 9 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{9}{10^i}$.
x vérifie l'égalité $10x = 9 + x$ et la solution de cette équation est $x = 1$.
Ainsi $x = 0,9999... = 1$.

Démonstration 2 :
Après avoir posé la division euclidienne $1 \div 3$ on s'accorde à écrire $x = \frac{1}{3} = 0,33333....$
Or $3x = 0,99999...$ et $3x = 3 \times \frac{1}{3} = 1$.
$0,99999.... = 1$.

Démonstration 3 :
Soit $x = 0,99999.....$ Proposition $\mathcal{P}$: $x < 1$.
Supposons $\mathcal{P}$ vraie.
La moyenne arithmétique $\overline{x}$ de x et 1 est telle que : $x < m < 1$.
Par conséquent on a la succession des inégalités suivantes :

- $0,9 < m < 1$: de cette inégalité on conclut que la première décimale de m est 9.
- $0,99 < m < 1$: de cette inégalité on conclut que la deuxième décimale de m est 9.
- ect.

Conclusion : $m = 0,99999... = x$.
Par contradiction, la proposition $\mathcal{P}$ est fausse donc la négation de $\mathcal{P}$ est vraie soit $x \geq 1$.
Comme $0,99999...$ n'est pas strictement supérieur à 1, nécessairement $x = 1$.
Remarque : on peut conclure aussi le raisonnement par $m = \frac{x+1}{2} = x \Longleftrightarrow x = 1$.

Remarque : Tous les nombres entiers admettent deux écritures décimales illimitées dès lors que $1 = 1,00000....$ et $1 = 0,99999....$

Précision de la précédente définition par quatre définitions équivalentes.
Définition d'un nombre décimal :

1. Un nombre x est décimal s'il possède UNE écriture décimale admettant un nombre fini de chiffres après la virgule.
2. Un nombre x est décimal s'il existe un entier naturel n tel que $x10^n \in \mathbb{Z}$. (le plus petit entier n tel que $x10^n \in \mathbb{Z}$ est appelé ordre du nombre décimal.
3. Un nombre x est décimal s'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = \frac{a}{10^n}$.
4. Un nombre x est décimal s'il existe $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $x = \frac{a}{2^n \times 5^m}$, la fraction étant irréductible.

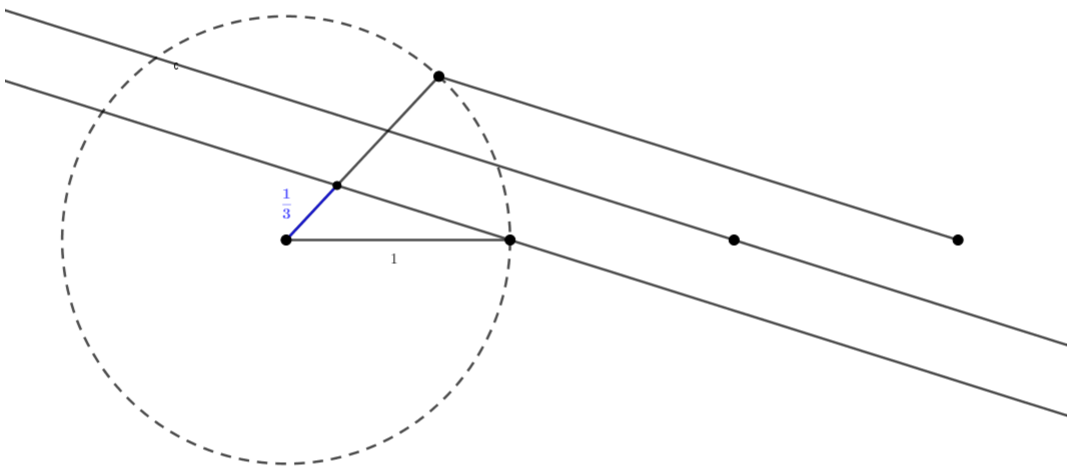
2 Un tiers n'est pas décimal

Démontrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal
Approche de la représentation du nombre par le calcul à la main :
$\frac{1}{3} = 0,333333333....$
D'après les définitions précédentes, cette égalité ne permet de pas de justifier que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.
Soit la proposition $\mathcal{P}$: $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.
Par définition il existe $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$.
On a alors $10^n = 3a$.
10^n serait multiple de 3 ce qui est faux.
Par contradiction $\mathcal{P}$ est fausse donc la négation de $\mathcal{P}$ est vraie.

3 Un tiers et application à la photographie : la règle des tiers

3.1 Construction d'un tiers à la règle et au compas

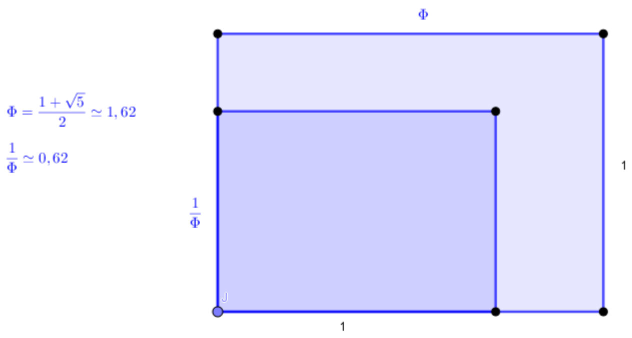
Sur GeoGebra, pour construire $\frac{1}{3}$ on peut utiliser le théorème de Thalès.
On impose un menu restreint pour réaliser la construction (point, segments, droite, cercle, symétrie centrale, droites parallèles (on peut différencier entre les élèves sur l'objet droites parallèles)).

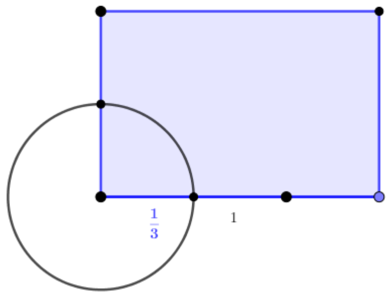


3.2 Photographie : l'harmonie du tiers

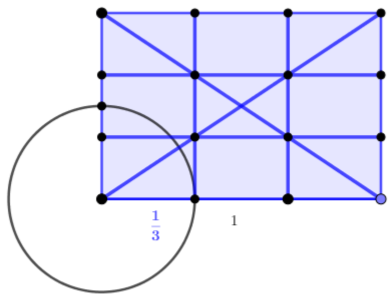
Une première remarque historique : il semblerait que La pyramide de Khéops (vers 2600 av. J.-C.) permettrait de dater le nombre d'Or à son apparition.
$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,62.$

Une approximation grossière de Φ est $\dfrac{3}{2}$.
Le partage de $\dfrac{3}{2}$ en tiers donne $\dfrac{1}{2}$ et l'inverse de $\dfrac{3}{2}$ est $\dfrac{2}{3} \simeq 0,67$.





On remarque que le rectangle d'Or de côté 1 et $\dfrac{1}{\Phi}$ est très proche du rectangle de côté 1 et $\dfrac{2}{3}$.
Nombre d'Or et un tiers : même combat d'harmonie ?
En Mathématique, l'un est rationnel et l'autre irrationnel, une différence de taille à 0,05 près !
Le découpage d'une photographie harmonisée au tiers est le suivant, il peut être étudié en classe :



Les points d'intersections dans le cadre sont appelés points forts de l'image. Pour équilibrer l'image on place le sujet principal de l'image sur un des points forts et d'autre(s) sujet(s) plus discrets sur les autres points forts.

4 Applications inspirées d'un article de Math en Jeans : suite décimale illimitée

Des idées d'exercices et de démonstrations, les exercices ne sont pas indépendants :
Exercice 1 : Nombres à suite décimale illimitée périodique

1. Soit le nombre décimale $x = 43,525252....$ Est-ce que ce nombre est rationnel ?
2. Généraliser l'exemple précédent avec un nombre décimal à trois chiffres après la virgule :
   $x = y, abc\ abc\ abc\ ....$
3. Qu'en est-il de la réciproque ?
   (a) Soit le nombre décimale $x = \dfrac{38}{7}$. Est-ce que ce nombre a une suite décimale illimité périodique ?
   (b) Généraliser l'exemple précédent.

Remarque : Si on note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres qui ont un développement décimale illimité périodique on a successivement démontré :

- $\mathbb{P} \subset \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{P}$

On peut alors conclure $\mathbb{P} = \mathbb{Q}$.

Exercice 2 : Nombres à suite décimale illimitée non périodique

1. *Entre deux rationnels même très proches, y a-t-il toujours un rationnel ?*
   (a) Soit la nombre rationnel $a = 4,37246837246837246837246837 2468...$ et $b = a + 10^{-25}$. Écrire le nombre b et les 30 premières décimales. Justifier que ce nombre b est rationnel.
   (b) Déterminer un nombre rationnel c compris entre a et b.
   (c) Combien existe-t-il de nombre rationnels compris entre a et b ?
2. *Vers les nombres irrationnels*
   (a) Soit le nombre rationnel $x = 0,101001000100001000001000000100000001....$ (exemple de Rozsa Péter dans JEUX AVEC L'INFINI (Éditions du seuil))
      i. x est-ce que x est rationnel ?
      ii. x est dans les intervalles successifs suivants : $x \in [0,1\ ;\ 0,2]$, $x \in [0,101\ ;\ 0,102]$,
      $x \in [1,101001\ ;\ 1,101002]$, etc... Ordonner les intervalles qui contiennent x.
      iii. En raisonnant par l'absurde, démontrer qu'il existe un seul point appartenant à tous ces intervalles.
3. *Comment trouver un rationnel entre deux irrationnels ?*

Annexes

- Quelques réflexions sur les nombres décimaux,Stéphane Frigot, professeur au lycée Guist'hau, Nantes, septembre 2014.
- Développements décimaux, Math en Jeans, Par Mlle Agathe Lahousse (1S), Mlle AnneLaure Cadon (1S), Mlle Aurélie Guihard (1ES), élèves du lycée Fragonard de l'Isle Adam (95) et Mlle Sabrina Potier (TES), Mlle Leila Bendakhlia (2nde), élèves du lycée Georges Braque d'Argenteuil (95), enseignantes : Mmes Annick Boisseau, Joëlle Richard, chercheur : M. Stéphane Labbé
- Début d'un document universitaire, CAPES, académie de Lyon.

5 Différenciation

5.1 Introduction-définition d'un nombre décimal

proposer un exercice qui reprend les trois démonstrations : chaque élève traite les trois démonstrations, la dernière est davantage accompagnée.

5.1.1 Processus

Les trois démonstrations permettent de varier les processus, un élève qui n'aurait pas bien réussi la première à l'occasion de se rattraper avec la deuxième démonstration.
La répétition des 3 exemples de démonstration permet de préciser le raisonnement par l'absurde.

5.1.2 Contenus

Les trois démonstration qui prouvent que $0,999.... = 1$

5.1.3 Production

Exposer la ou les démonstrations par des passages au tableau, comparer les productions des élèves (erreurs, réussite etc...), les productions permettent de varier les processus.
Des définitions d'un nombre décimal élaborées de manière collective en classe entière.
Puis démontrer qu'un tiers n'est pas un nombre décimal : cette démonstration peut être renvoyée comme travail à faire à la maison (avec ou sans coup de pouce suivant le niveau des élèves) puisqu'il reprend un raisonnement par l'absurde.

Remarque : la programme suivant sur Python ou le calcul à la main permet d'illustrer que l'écriture décimale d'un tiers n'est pas finie :

```
#division de 1 par 3

a=1
b=3
r=a%b
L=[int(a-r)/b]
while r!=0:
     a=10*r
     r=a%b
     L.append(int((a-r)/b))
print(L)
```

division_euclidienne.py

La séance suivante, après la correction des productions des élèves sur la démonstration qu'un tiers n'est pas un nombre décimal, on peut proposer un autre raisonnement :
Par un raisonnement par l'absurde, on peut aboutir à une démonstration, supposons que $\frac{1}{3} = 0,333...3$ dans ce cas $1 = 3 \times \frac{1}{3} = 0,999...9$. Or la différence entre 1 et 0,999...9 est 0,000...1 non nulle. ce qui contredit l'hypothèse de départ. Ce raisonnement peut constituer une autre démonstration qui s'appuie sur la première définition d'un nombre décimal.

Suite à ces travaux où le raisonnement par l'absurde est apparu plusieurs fois on peut organiser une grille de compétence sur raisonner :

compétence raisonner	maîtrise insuffisante	maîtrise fragile	maîtrise satisfaisante	très bonne maîtrise	non évaluée
mise en place de l'hypothèse					
démarches et implications successives					
conclusion					

Cette grille est communiquée aux élèves dès le début des activités et auto-évaluée, puis évaluée au devoir par l'enseignant avec un raisonnement par l'absurde.

5.2 Les applications

5.2.1 Processus

Les applications donnent différentes approches du nombre $\frac{1}{3}$, ainsi on fait varier les registres du nombre : compétence représenter (ordre de grandeur, valeur approchée, construction géométrique, utilisation dans les calculs).
On peut élaborer une grille d'évaluation.

5.2.2 Contenus

Pour tous les élèves la construction d'un tiers est intéressante.
Suivant le goût des élèves ont peut orienter les applications vers l'art ou les suites décimales illimitées périodiques ou non périodiques.
Pour l'art on peut comparer les approches avec celles du nombre d'Or et le rectangle d'Or ou le rectangle d'Harmonie (voir $\sqrt{2}$).

5.2.3 Structure

en groupe.

5.2.4 Productions

Rédigées et évaluées (devoir maison)
Des recherches documentaires peuvent alimenter les productions.
Pour le document sur l'art, des photos peuvent être prises et commentées...