MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2019

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.
Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.
Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices nationaux

Mercredi 13 mars de 8h00 à 10h00

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Triangles à côtés entiers*) et 2 (*Premières fois*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Triangles à côtés entiers*) et 3 (*AGADADAGA*).

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Triangles à côtés entiers

On dit qu'un triangle est un triangle entier si les longueurs de ses 3 côtés sont des entiers naturels non nuls.
On rappelle la propriété dite de l'« inégalité triangulaire », caractéristique de tout triangle non aplati : la longueur de chacun des côtés est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

1. ***a.*** Parmi les triplets (x, y, z) suivants, indiquer lequel représente les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati, puis comment tracer ce triangle et avec quels outils :

(4, 4, 5) ; (3, 6, 9) ; (2, 2, 6)

b. Quelles sont les valeurs possibles de l'entier z si $(15, 19, z)$ désigne les longueurs des trois côtés d'un triangle entier non aplati rangées par ordre croissant (soit : $z \geq 19$) ?

c. Étant donné trois entiers naturels non nuls x, y et z tels que $x \leq y \leq z$, pourquoi suffit-il d'ajouter une seule condition (à préciser) pour que le triplet (x, y, z) désigne les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati ?

2. Soit p un entier naturel non nul. On note E_p l'ensemble des triplets d'entiers naturels *rangés par ordre croissant* $x \leq y \leq z$ et désignant les côtés d'un triangle entier non aplati dont le périmètre est égal à p.
Ainsi obtiendrait-on $E_9 = \{(1, 4, 4), (2, 3, 4), (3, 3, 3)\}$.
a. Si le triplet (x, y, z) appartient à E_{18}, quelles sont les valeurs maximale et minimale pour z ?
b. Donner la composition de E_{18} et représenter dans un repère orthonormé l'ensemble points de coordonnées (x, y) pour lesquels il existe un entier naturel z tel que $(x, y, z) \in E_{18}$. Vérifier que ces points se situent à l'intérieur ou sur les bords d'un triangle dont les sommets ont des coordonnées entières.

3. ***a.*** Justifier que si $(x, y, z) \in E_p$ alors $(x + 1, y + 1, z + 1) \in E_{p+3}$.

b. Soit $(x, y, z) \in E_{p+3}$. Déterminer une condition sur x, y et z pour que $(x - 1, y - 1, z - 1) \in E_p$.

c. En déduire que si p est impair alors E_p et E_{p+3} ont le même nombre d'éléments.

4. Étude de $\boldsymbol{E_{2\,019}}$.
a. $E_{2\,019}$ contient-il un triplet (x, y, z) correspondant à un triangle équilatéral ?
b. $E_{2\,019}$ contient-il des triplets (x, y, z) correspondant à des triangles isocèles non équilatéraux ? Si oui combien ?
c. Montrer que si $E_{2\,019}$ contient un triplet (x, y, z) correspondant à un triangle rectangle alors
$2\,019^2 = 4\,038(x + y) - 2xy$.
En déduire que $E_{2\,019}$ ne contient pas de triangle rectangle.

5. Dans cette question on se propose de dénombrer $E_{2\,019}$.
a. Soit $(x, y, z) \in E_{2\,022}$. On rappelle que $x \leq y \leq z$. Établir que $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$.

b. Réciproquement, montrer que si $x \leq y$, $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ alors
$(x, y, 2\,022 - x - y) \in E_{2\,022}$.

c. Pourquoi, dans un repère orthonormé, l'ensemble des points à coordonnées entières positives (x, y) telles que $x \leq y$, $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ constitue-t-il l'ensemble des points à coordonnées entières d'un triangle qui est rectangle ? En déterminer l'aire $\mathcal{A}$ ainsi que le nombre de points à coordonnées entières situés sur ses côtés.

d. On admet le théorème de Pick : « Si un polygone $\boldsymbol{P}$ est tel que tous ses sommets sont à coordonnées entières dans un repère orthonormé alors son aire $\mathcal{A}$ est donnée par la formule $\mathcal{A} = i + \frac{j}{2} - 1$ où i désigne le nombre de points à coordonnées entières situés à l'intérieur de $\boldsymbol{P}$ et j le nombre de ceux situés sur les côtés de $\boldsymbol{P}$. »
En déduire le nombre de triplets de $E_{2\,022}$ puis celui de $E_{2\,019}$.

6. Une solution algorithmique.
De manière générale, concevoir un programme (à retranscrire sur la copie) permettant d'énumérer et de dénombrer E_p. Le tester sur E_{18} et sur $E_{2\,019}$.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Premières fois

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement 2 diviseurs entiers naturels distincts : 1 et lui-même. Par exemple : 2, 3 et 5 sont premiers alors que 0, 1 et 6 ne le sont pas. On rappelle le théorème de décomposition *en produit de facteurs premiers :*
Pour tout entier naturel $n \geq 2$, il existe un unique entier naturel k, une unique liste de nombres premiers distincts rangés dans l'ordre croissant $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_k)$ et une unique liste d'entiers naturels non nuls $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$ tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

On écrit, par exemple, $72 = 2^3 \times 3^2$ (ici $k = 2$), ou $32 = 2^5$ (dans ce dernier exemple, $k = 1$). La décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre premier p s'écrit simplement $p = p^1$.

Une fonction agissant sur les nombres entiers naturels

On souhaite si possible déterminer une fonction $\Delta\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ possédant les propriétés suivantes :
Propriété (1) : $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$;
Propriété (2) : Pour tout nombre premier p, $\Delta(p) = 1$;
Propriété (3) : Pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a \times b) = \Delta(a) \times b + a \times \Delta(b)$.

On suppose en questions **1**, **2** et **3** qu'une telle fonction Δ existe.
1. Soit p un nombre premier. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^2)$? $\Delta(p^3)$? Un entier naturel n étant donné, quelle est l'image par Δ de p^n ?
2. *a.* Soit p et q des nombres premiers distincts, m et n des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^m \times q^n)$?
b. Le nombre $\Delta(10^n)$ est-il un multiple de 7 pour $n \geq 1$?
3. À tout nombre entier $n \geq 2$, dont la décomposition en produit de facteurs premiers s'écrit :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

on associe les quotients q_1 de n par p_1, q_2 de n par p_2,... , q_k quotient de n par p_k. Montrer qu'alors :

$$\Delta(n) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \cdots + \alpha_k \times q_k$$

4. Vérifier que l'expression ainsi obtenue satisfait les propriétés (2) et (3) ci-dessus. Cette expression, alliée à la convention portée dans la propriété (1), définit donc une unique fonction Δ convenable.

Étude de quelques images d'entiers par la fonction Δ.
5. *a.* Calculer $\Delta(12), \Delta(56), \Delta(1\ 001)$.
b. Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 0$?
c. Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 1$?
d. Tout entier naturel m a-t-il au moins un antécédent par Δ ?
e. Est-il vrai que, pour tout entier naturel n, $\Delta(n) \leq n$?
6. *a.* Montrer que si p et q sont des nombres premiers alors $\Delta(p \times q) = p + q$.
b. Est-il vrai que pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a \times b) = \Delta(a) + \Delta(b)$?
7. *a.* Est-il vrai que pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$?
b. Soient a et b deux entiers naturels tels que $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$ et un entier naturel quelconque k. Montrer que : $\Delta(ka + kb) = \Delta(ka) + \Delta(kb)$.

Les points fixes de la fonction Δ
8. *a.* Soit p un nombre premier. Soit m un entier naturel. On suppose que m est un multiple de p^p. Montrer que dans ce cas, $\Delta(m)$ est aussi un multiple de p^p.
b. Soit n un entier naturel et p un nombre premier. Soit α l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n. On suppose que $\alpha \geq 1$. Montrer que si $\alpha < p$, alors $\alpha - 1$ est l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $\Delta(n)$.
9. Résoudre l'équation $\Delta(x) = x$.

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

AGADADAGA

Dans cet exercice, on appellera *mot* toute suite de lettres formée des lettres A, D et G. Par exemple : ADD, A, AAADG sont des *mots*.

Astrid possède un logiciel qui fonctionne de la manière suivante : un utilisateur entre un *mot* et, après un clic sur EXÉCUTER, chaque lettre A du *mot* (s'il y en a) est remplacée par le *mot* AGADADAGA. Ceci donne un nouveau *mot*.

Par exemple, si l'utilisateur rentre le *mot* AGA, on obtient le *mot* AGADADAGAGAGADADAGA. Un deuxième clic sur EXÉCUTER réitère la transformation décrite ci-dessus au nouveau *mot*, et ainsi de suite.

1. Quels sont les mots qui restent inchangés quand on clique sur EXÉCUTER ?

Traitement de texte

Astrid rentre le *mot* A.

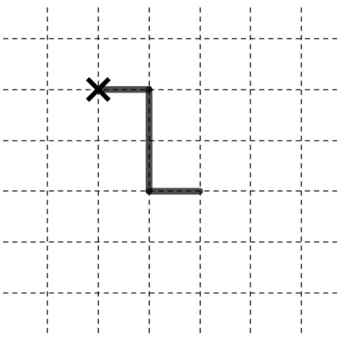
2. Quel *mot* obtient-elle après avoir cliqué deux fois sur EXÉCUTER ?

3. Combien de clics au minimum faut-il pour obtenir un *mot* contenant un milliard de A ?

4. Après 20 clics, combien le mot obtenu contient-il de lettres D ?

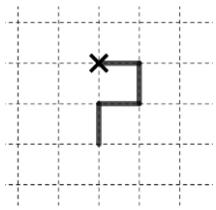
Motif

Astrid souhaite maintenant dessiner un motif sur une feuille de papier quadrillé, en utilisant le dernier mot obtenu par le logiciel. Pour cela, elle lit de gauche à droite chaque lettre de ce mot et trace une ligne brisée sans lever le stylo en suivant les consignes suivantes :



- Le point de départ de la ligne est une croix située sur un nœud du quadrillage ;
- si la lettre lue est A, elle trace horizontalement et de gauche à droite un segment de longueur un carreau ;
- si la lettre lue est G, elle tourne la feuille d'un quart de tour dans le sens des aiguilles d'une montre ;
- si la lettre lue est D, elle tourne la feuille d'un quart de tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ;
- quand toutes les lettres sont lues, elle remet la feuille dans la position initiale pour regarder le motif obtenu.

Par exemple, le motif obtenu à partir du *mot* ADAAGA est représenté à gauche.

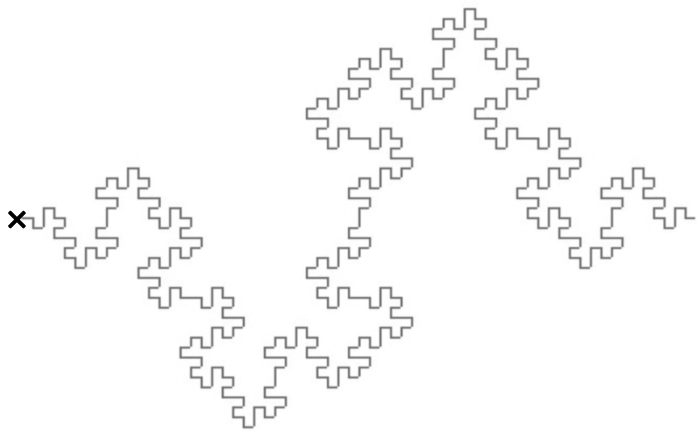


5. Astrid a réalisé le motif de droite. Quel *mot* avait-elle obtenu ?

6. Astrid entre le *mot* A et clique deux fois sur EXÉCUTER. Dessiner le motif obtenu.

7. Astrid reprogramme le logiciel et remplace le mot AGADADAGA par un autre mot dont elle ne se souvient plus. Elle rentre le mot A et obtient le motif ci-dessous après avoir cliqué trois fois sur EXÉCUTER. Quel est le mot oublié par Astrid ?

8. On s'intéresse dans cette question uniquement aux motifs obtenus à partir de *mots* qui commencent par la lettre A, et se poursuivent en juxtaposant des séquences GA ou DA. On appelle *largeur* du motif le nombre de carreaux compris entre les points les plus à gauche et à droite du motif obtenu. Par exemple, la largeur du motif obtenu à partir du *mot* ADAGAGA est 2.



a. Quelle est la largeur du motif obtenu à partir du *mot* AGAGADA ?

b. Un *mot* conforme à l'hypothèse du **8.** comporte dix lettres D et dix lettres G. Déterminer toutes les largeurs possibles du motif obtenu.

Olympiades académiques de mathématiques 2019

Académie de Limoges

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.
Les candidats indiqueront leur nom, prénom, classe, série et établissement sur la copie. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Mercredi 13 mars de 10h10 à 12h10

Tous les candidats traitent **deux exercices.**
Chaque candidat doit résoudre **individuellement, ou par équipe de deux, trois, ou au maximum quatre candidats**, les deux exercices.
<u>**Il est conseillé de résoudre les exercices par équipe de deux candidats.**</u>
Les candidats ayant choisi de résoudre les exercices par équipe indiqueront leur nom, prénom, classe, série et établissement sur la même copie.

Exercice académique 1

Mise en situation

Ce travail peut être fait en équipe : avec votre partenaire éventuel, vous devrez simuler un tête à tête au poker sans carte.
Il n'est pas nécessaire de savoir jouer au poker pour répondre aux questions.
Chaque coup est considéré comme une expérience aléatoire à deux issues équiprobables : succès ou échec.
Ainsi, on pourra simuler un coup avec les fonctions aléatoires de la calculatrice (RanInt#(1,2), NbrAléat>0.5, etc.) ou bien jouer à «pierre-feuille-ciseaux».
Une partie est constituée d'au maximum 10 expériences (10 coups) indépendantes les unes des autres.
Dans cette version simplifiée du jeu de poker, les joueurs s'affrontent à chaque coup en mettant toujours en jeu l'ensemble des jetons dont ils disposent.

Partie A : Principe et expérimentation

Au début de chaque partie, le premier joueur reçoit une pile de jetons («stack») de 16 000 et son partenaire 4 000.
À chaque coup de la partie, les deux joueurs déterminent au hasard lequel doit l'emporter.
Si, à l'instant où se joue le coup, le joueur ayant la plus grosse pile de jetons gagne le tirage aléatoire, alors il reçoit la totalité des jetons de son adversaire et il gagne la partie.
Si c'est le joueur qui a la plus petite pile de jetons qui l'emporte, il double son stack en recevant de son adversaire la somme égale à celle dont il disposait avant le coup. On procède alors à un nouveau tirage aléatoire selon les règles énoncées précédemment.
Si à l'issue du 10^{e} coup la partie n'est pas terminée, on considérera la partie nulle et celle-ci sera ignorée lors des décomptes finaux.
Lors de chaque partie, les candidats noteront soigneusement les résultats obtenus en consignant les résultats de chaque coup dans un tableau tel que celui-ci :

PARTIE	Joueur	Départ	Coup nº1	Coup nº2	Coup nº3	…	VAINQUEUR
1	1	16000	12000	20000			J1
	2	4000	8000	0			
2	1	16000	20000				J1
	2	4000	0				
3	1	16000	12000	4000	0		J2
	2	4000	8000	16000	20000		
…	1	16000	…	…	…	…	…
	2	4000	…	…	…	…	

Le tableau précédent a été établi avec la règle :
«Le joueur 1 gagne le coup si le nombre au hasard de la calculatrice (compris entre 0 et 1) est supérieur à 0, 5».
Pour la première partie, la série de nombres aléatoires était {0,2888647537 ; 0,5988692354}.
Pour la seconde partie, la série de nombre aléatoire était {0,8368269527} et pour la troisième partie, la série de nombres aléatoires était {0,1428963561 ; 0,4369256134 ; 0,3396685425}.
On procédera ainsi pour simuler dix parties.

1. Produire un tableau de simulation de dix parties. Vous indiquerez comment vous avez procédé pour faire votre simulation. Quel semble être le joueur le plus souvent victorieux ?
2. À l'aide d'un tableur, on a simulé 1 000 parties en tête à tête («Heads Up») :
   Quelle semble être la probabilité que le joueur 1 gagne la partie ?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Q	R	S	T
1			**DÉPART**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**RÉSULTAT**			**JETONS**	**VICTOIRES**
2	PARTIE 1	**JOUEUR 1**	16000	12000	20000									J1		**JOUEUR1**	16000	82,10 %
3		JOUEUR 2	4000	8000	0											**JOUEUR2**	4000	17,90 %
4	PARTIE 2	**JOUEUR 1**	16000	20000										J1				
5		JOUEUR 2	4000	0														
6	PARTIE 3	**JOUEUR 1**	16000	12000	4000	0								J2				
7		JOUEUR 2	4000	8000	16000	20000												
8	PARTIE 4	**JOUEUR 1**	16000	12000	4000	8000	16000	20000						J1				
9		JOUEUR 2	4000	8000	16000	12000	4000	0										
10	PARTIE 5	**JOUEUR 1**	16000	12000	20000									J1				
11		JOUEUR 2	4000	8000	0													
12	PARTIE 6	**JOUEUR 1**	16000	12000	4000	8000	0							J2				
13		JOUEUR 2	4000	8000	16000	12000	20000											

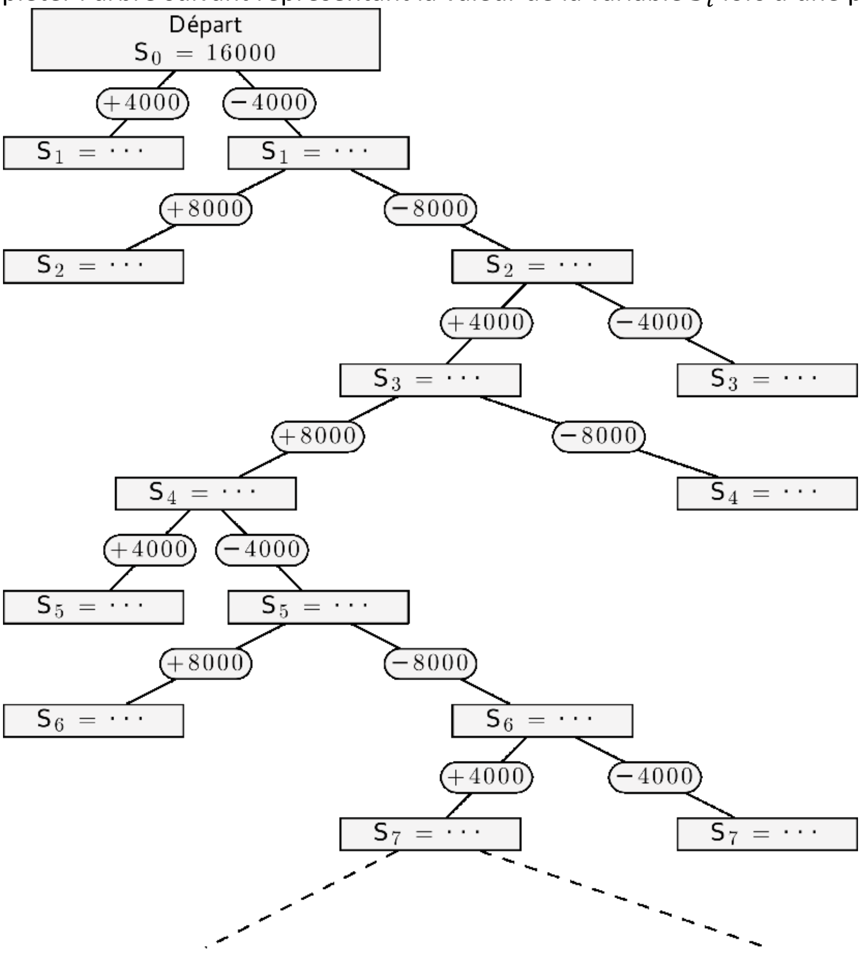
Partie B : Recherche d'une formule mathématique

On adopte le point de vue du joueur 1 auquel on attribue un stack de 16 000 (un stack de 4 000 à son adversaire) et on note :

- J_1 l'événement «le joueur 1 gagne la partie» ;
- $\overline{J_1}$ l'événement «le joueur 1 perd la partie».

On note $p_i(J_1)$ la probabilité que le joueur 1 gagne la partie en exactement i coups et $p_{\leqslant i}(J_1)$ la probabilité que le joueur 1 gagne la partie en i coups au plus.
Pour tout nombre entier i supérieur ou égal à 1, on appelle S_i la variable aléatoire qui prend pour valeur le montant du stack du joueur 1 à l'issue du $i^{ème}$ coup. On appellera S_0 la valeur du stack initial au début de la partie.

1. Recopier puis compléter l'arbre suivant représentant la valeur de la variable S_i lors d'une partie.



2.
a. Montrer que la probabilité que la partie se déroule en 3 coups est $p_3(\overline{J_1}) = 0{,}125$.
b. Est-ce que le joueur 1 peut gagner la partie en exactement trois coups ? Exactement quatre coups ? Expliquer. En déduire $p_3(J_1)$ et $p_4(J_1)$.
c. Quelle est la probabilité que le joueur 1 gagne la partie en cinq coups exactement ?
d. Montrer que la probabilité $p_{\leq 5}(J_1)$ que le joueur 1 gagne la partie en cinq coups au plus est égale à 0,78125.
e. Conjecturer une formule donnant la probabilité que le joueur 1 gagne la partie en 10 coups au plus.
3. Proposer une formule de calcul simple qui permettrait de calculer la probabilité $p_{\leq i}(J_1)$ pour i «suffisamment grand».

Partie C : Algorithme de calcul

Pour des stacks initiaux à 16 000 pour le joueur 1 et 4 000 pour le joueur 2, l'algorithme ci-après permet de calculer $p_{\leq 10}(J_1)$. Vous pourrez le traduire sur votre calculatrice pour répondre aux questions suivantes :

```
N ← 10
P ← 0
Pour I allant de 1 à N
    Si (I + 1) MODULO 4 ≠ 0 et I MODULO 4 ≠ 0 (*)
        P ← P + 0,5^I
    Fin Si
Fin Pour
```

(*) « A MODULO B » désigne le reste de la division euclidienne de A par B.

1. Calculer $p_{\leq 10}(J_1)$ à 10^{-7} près.
2. Calculer $p_{\leq 20}(J_1)$ à 10^{-7} près.
3. Quel semble être la probabilité $p(J_1)$ que le joueur 1 gagne une partie ?

Partie D : Autres exemples

On conserve un total de jetons égal à 20 000.

1. Le joueur 1 reçoit un stack de 12 000 jetons et le joueur 2 reçoit un stack de 8 000 jetons.
a. Produire un tableau de simulations de 10 parties.
b. Qu'observez-vous au bout de trois coups réalisés ? Vous pourrez reproduire un arbre semblable à celui de la partie B pour justifier votre réponse.
c. Proposer une formule pour calculer $p_{\leq 10}(J_1)$.
d. Quel semble être la probabilité $p(J_1)$ que le joueur 1 gagne une partie ?
2. Que dire si les stacks initiaux des deux joueurs sont égaux à 10 000 jetons ? Justifier.

Exercice académique 2

Le jeu de Nim à un tas.

Installation du jeu :

Deux joueurs A et B s'affrontent. On prend un nombre $N > 0$ d'objets (des crayons par exemple) et on convient d'un nombre $p \geqslant 1$. On joue alors au Nim$\binom{N}{p}$.

Règle du jeu :

Chaque joueur, en commençant par le joueur A, prélève dans le tas un nombre d'objets compris entre 1 et p (inclus). Le perdant est celui qui prend le dernier objet.

Un déroulement de partie peut être décrit par une suite finie de nombres se terminant par 1. Par exemple si A commence en prenant 3 objets puis B continue en prenant 1 objet, puis A prend 2 objets, la suite s'écrira (3 ; 1 ; 2 ; … ; 1). Le dernier 1 indique que le dernier objet a été pris par le perdant.

1. Le jeu de Nim$\binom{5}{3}$.

a. Proposer un déroulement de partie (c'est-à-dire une suite finie de nombres) où A gagne, puis un déroulement de partie où B gagne.

b. Dans le Nim$\binom{5}{3}$, existe-t-il une stratégie gagnante pour l'un des joueurs ? Justifier.

2.

a. Quelles sont les valeurs de N pour lesquelles il existe dans le Nim$\binom{N}{3}$ une stratégie qui permette à l'un des joueurs de gagner. Décrire alors la stratégie de chacun des joueurs.

b. L'algorithme ci-dessous est une stratégie gagnante pour le joueur A. Sur votre copie, recopier et compléter les lignes encadrées de l'algorithme.

- N_A est le nombre d'objets pris par le joueur A,
- N_B est le nombre d'objets pris par le joueur B,
- $nombre - entier - hasard - entre(1\,;p)$ donne un nombre entier pris au hasard dans l'intervalle $[1\,;\,p]$.

```
N ← 14
p ← 3
tant que N ≠ 0 :
    ┌──────────────────────────────────────┐
    │si ...................................... :│
    │        N_A ← .................        │
    │sinon :                                │
    │        N_A ← .................        │
    │fin si                                 │
    └──────────────────────────────────────┘
    N ← N − N_A
    si N < p :
        N_B ← 1
    sinon :
        N_B ← nombre − entier − hasard − entre(1;p)
    fin si
    N ← N − N_B
    si N = 0:
        le joueur B perd
    fin si
fin tant que
```

c. Dans l'algorithme, expliquer pourquoi si $N < p$ nécessairement $N_B \leftarrow 1$.

d. Écrire un algorithme qui donne une stratégie gagnante pour le joueur B pour un Nim$\binom{N}{3}$ où N sera affectée à une valeur que vous choisirez en respectant la contrainte $N > 20$.

3. Peut-on généraliser des stratégies gagnantes pour un Nim$\binom{N}{p}$?