

PLUS GRAND NOMBRE – FICHE PROFESSEURS

✗ Durée : 30 minutes

✗ Niveau : à partir de l'enseignement de spécialité de première

✗ La situation-problème

Trouver une méthode pour déterminer parmi deux nombres lequel est le plus grand

✗ Le(s) consigne(s) donnée(s) à l'élève

Vous avez 30 minutes pour répondre à la question. Toute réponse même partielle sera examinée.

✗ Réponses attendues

1. Utiliser la calculatrice pour calculer chaque nombre

Réponse : $A = 2$ et $B = 2$ donc $A = B$.

2. Utiliser la calculatrice pour calculer la différence

Réponse : $A - B = 10^{-10}$ donc $A > B$.

Méthode proposée par les élèves

Pour comparer deux nombres, on cherche le signe de la différence

Un exemple de mise en œuvre assez simple ... qui peut aboutir

$$A - B = \frac{2,0000000001}{2,0000000001 - 1,0000000001^2} - \frac{2,0000000002}{2,0000000002 - 1,0000000001^2}$$
$$A - B = \frac{2,0000000001 \times (2,0000000002 - 1,0000000001^2) - 2,0000000002 \times (2,0000000001 - 1,0000000001^2)}{(2,0000000001 - 1,0000000001^2)(2,0000000002 - 1,0000000001^2)}$$
$$A - B = \frac{0,0000000001 \times 1,0000000001^2}{(2,0000000001 - 1,0000000001^2)(2,0000000002 - 1,0000000001^2)}$$

Compétences travaillées :

- Maîtrise des techniques opératoires ;

- L'intelligence du calcul (stratégie de choix des calculs à effectuer pour atteindre le signe ; utilisation d'un ordre de grandeur pour conclure, ...)

Autre possibilité :

$$A = \frac{2,0000000001}{2,0000000001 - (1,0000000001)^2} \quad \text{ou} \quad B = \frac{2,0000000002}{2,0000000002 - (1,0000000001)^2}$$

Plutôt que de comparer A et B , on peut comparer leurs inverses.

$$\frac{1}{A} = \frac{2,0000000001 - 1,0000000001^2}{2,0000000001} \quad \text{et} \quad \frac{1}{B} = \frac{2,0000000002 - 1,0000000001^2}{2,0000000002}$$

Une première méthode pour comparer les inverses :

Chercher le signe de leur différence (qui pose en fait moins de problème que la précédente)

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{2,0000000002 \times (2,0000000001 - 1,0000000001^2) - 2,0000000001 \times (2,0000000002 - 1,0000000001^2)}{2,0000000001 \times 2,0000000002}$$

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{-0,0000000001 \times 1,0000000001^2}{2,0000000001 \times 2,0000000002}$$

On obtient $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} < 0$, d'où $\frac{1}{A} < \frac{1}{B}$ et, puisque A et B sont strictement positifs, $A > B$.

Une autre méthode qui consiste à mieux anticiper la forme des deux inverses

$$\frac{1}{A} = \frac{2,0000000001 - 1,0000000001^2}{2,0000000001} \quad \text{et} \quad \frac{1}{B} = \frac{2,0000000002 - 1,0000000001^2}{2,0000000002}$$

On utilise le fait que les deux formes se ressemblent à un nombre près qui apparaît deux fois

On isole ce nombre en écrivant : $\frac{1}{A} = 1 - \frac{1,0000000001^2}{2,0000000001}$ et $\frac{1}{B} = 1 - \frac{1,0000000001^2}{2,0000000002}$.

On peut alors demander aux élèves d'aboutir en recherchant le signe de la différence :

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1,0000000001^2}{2,0000000002} - \frac{1,0000000001^2}{2,0000000001} \quad (\text{et en pensant à factoriser ...})$$

Une dernière méthode ... intéressante à développer car elle permet de mettre en œuvre les règles sur les inégalités et aussi de travailler l'enchaînement des fonctions.

$$\frac{1}{A} = 1 - \frac{1,0000000001^2}{2,0000000001} \quad \text{et} \quad \frac{1}{B} = 1 - \frac{1,0000000001^2}{2,0000000002}$$

On a : $2,0000000001 < 2,0000000002$.

On obtient alors successivement

$$\frac{1}{2,0000000001} > \frac{1}{2,0000000002}$$

$$-\frac{1,0000000001^2}{2,0000000001} < -\frac{1,0000000001^2}{2,0000000002}$$

$$1 - \frac{1,0000000001^2}{2,0000000001} < 1 - \frac{1,0000000001^2}{2,0000000002}$$

D'où $\frac{1}{A} < \frac{1}{B}$ et, finalement, $A > B$.

On applique la fonction inverse ...

On multiplie chaque membre par un nombre strictement négatif

On ajoute 1 à chaque membre

De nouveau la fonction inverse...

Réinvestissement ...

Exercice : Les nombres $\sqrt{1,00000001}$ et $1,000000005$ sont-ils égaux ? Si oui, démontrez-le. Sinon, déterminez lequel est le plus grand.

PLUS GRAND NOMBRE – FICHE ELEVES

✘ Énoncé

Parmi les deux nombres suivants, lequel est le plus grand :

$$A = \frac{2,0000000001}{2,0000000001 - (1,0000000001)^2} \quad \text{ou} \quad B = \frac{2,0000000002}{2,0000000002 - (1,0000000001)^2} ?$$