Suppléments :

Exercice 2 : Construction de la gamme diatonique de Pythagore

Nous reprenons la gamme à 7 notes, en ne considérant que les 5 premières quintes.

1. Les pythagoriciens ont adopté la solution suivante : la 7ème fréquence, f'_6 est calculée en considérant que le do$_4$, de fréquence $2f$, sera sa quinte.
a. Calculer l'intervalle entre f et f'_6.
Cet intervalle se nomme la **quarte**.

b. Calculer la valeur de f'_6.

Commentaire : Autre façon de définir la quarte

- *On cherche une note de fréquence f' dont la quinte sera le do$_3$, soit $\frac{3}{2} \times f' = f$ soit $f' = \frac{2}{3} f$. Or f' n'est pas dans l'octave $[f; 2f]$.* On considère donc sa note « à l'octave », de fréquence $2f' = \frac{4}{3} f$.
- *La construction retenue ici est celle des quintes « montantes » ; on peut aussi travailler sur les quintes « descendantes ».*
-

```
def gammeq8() :
    f=261.63
    f1=f
    gamme=[f]
# on détermine les 5 premières quintes
    for k in range(1,6):
        f1=f1*1.5
        if f1>2*f:
            f1=f1/2
        gamme=gamme+[f1]
# on ajoute la quarte et la fréquence du do4
    gamme=gamme+[4/3*f]+[2*f]
# on trie les fréquences obtenues par ordre croissant
    return sorted(gamme)
```

c. Classer les fréquences des notes obtenues dans l'ordre croissant, puis remplir le tableau page suivante.

2. **a.** Calculer les rapports de fréquences entre deux notes successives :

$$\frac{f_{ré_3}}{f_{do_3}}, \frac{f_{mi_3}}{f_{ré_3}}, \frac{f_{fa_3}}{f_{mi_3}}, \frac{f_{sol_3}}{f_{fa_3}}, \frac{f_{la_3}}{f_{sol_3}}, \frac{f_{si_3}}{f_{la_3}}, \frac{f_{do_4}}{f_{si_3}}$$

et reportez les dans le tableau.

Note	do$_3$	ré$_3$	mi$_3$	fa$_3$	sol$_3$	la$_3$	si$_3$	do$_4$
Fréquence (en Hz)								
Rapport entre deux notes successives	X							

b. Que constatez-vous ? Comparez avec $\frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$ et $\frac{2^8}{3^5} = \frac{256}{243}$.

Vocabulaire : Lorsqu'on multiplie une fréquence par $\frac{9}{8}$, on dit que l'on monte d'un **ton**, et lorsqu'on multiplie une fréquence par $\frac{256}{243}$, on dit que l'on monte d'un **demi-ton.** (on parle aussi de **lima** pythagoricien)

La gamme construite ici se nomme la gamme <u>diatonique de Pythagore</u>.
(on parle aussi de gamme heptatonique, car elle comporte 7 notes)

Commentaire : Ce qui est fait dans cet exercice avec le do$_3$ (début de la 3ème octave) peut être fait avec d'autres notes, par exemple le la$_3$, de fréquence 440 Hz. Cette note est traditionnellement celle du diapason, dont on se sert pour accorder les instruments. La valeur de cette fréquence fondamentale est plus simple pour les élèves, mais alors la construction de la gamme ne débute pas par do, ce qui peut aussi les gêner…

3. Par quel coefficient faut-il multiplier ce demi-ton pour obtenir un ton ? Exprimer ce coefficient à l'aide de puissances de 2 et de 3.
   Que constatez-vous ?

Exercice 3 : Gamme Chromatique ou gamme à 12 quintes

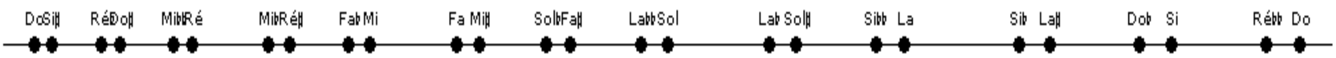
Gamme chromatique descendante

De même, nous pouvons obtenir une autre gamme chromatique, appelée descendante car basée sur les quintes descendantes. Les notes ainsi formées correspondent aux bémols.
(Voir commentaire de l'exercice 2)

Do-*Réb*-ré-*Mib*-Mi-Fa-*Solb*-Sol-*Lab*-La-*Sib*-Si-Do

Gamme à 25 notes

L'association des gammes chromatiques ascendante et descendante nous donne une gamme à 25 notes réparties comme suit :

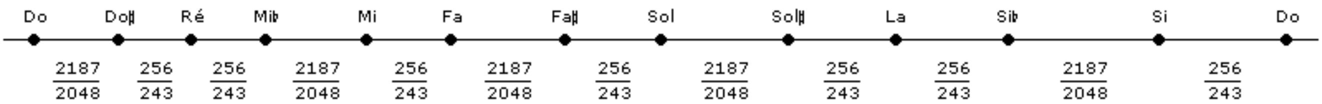


Mais 25 notes, c'est beaucoup trop. A commencer parce qu'un instrument à note fixe comme le piano ou la flûte seraient trop compliqués à jouer. On décide donc de faire des choix pour réduire cette gamme à 12 notes.

Gamme à 12 notes

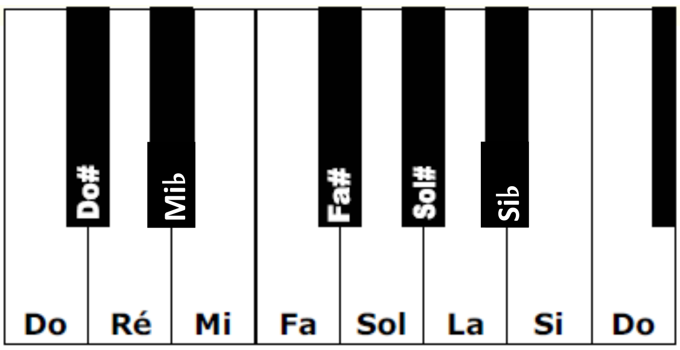
Pour ce faire, on supprime les notes altérées proches des notes naturelles et on ne retient qu'une altération dans chaque intervalle de ton.

Le choix habituel d'altérations de la gamme de Pythagore à 12 notes est le suivant :
Do ; Do# ; Ré ; Mi♭ ; Mi ; Fa ; Fa# ; Sol ; Sol# ; La ; Si♭ ; Si ; Do



Gamme de Pythagore à 12 notes et écarts correspondants.

Cette gamme de Pythagore, aussi appelée gamme naturelle, a été utilisée de l'Antiquité jusqu'au XVIè siècle ! La **gamme chromatique** est l'ensemble de douze notes comprenant les sept notes principales de la gamme diatonique (Les touches blanches du piano) et les cinq notes intermédiaires (Les touches noires)



a. Le demi-ton a-t-il une unique valeur ?
b. Justifier les intervalles séparant les notes Fa et Fa# et Fa# et Sol.
   (On peut rappeler que $f_{fa_3} = \frac{4}{3}f$ et $f_{fa\#} = \frac{3^6}{2^9}f$ et $f_{sol_3} = \frac{3}{2}f$ ou laisser les élèves les rechercher)

La quinte du loup

Nous l'avons vu, la série des quintes utilisée ne permet pas de faire une boucle complète pour retomber exactement sur l'octave.

De cet fait, il y aura donc forcément une quinte mal dimensionnée, plus courte que $\frac{3}{2}$! Cet intervalle (qui sonne donc légèrement faux) a été baptisé quinte du loup, car il semble "hurler" (à la manière d'un loup) lorsqu'on l'utilise. Et d'ailleurs pour cette raison, on ne l'utilise pas !

Dans la gamme chromatique à 12 notes c'est la quinte Sol#/Mi♭ qui s'est retrouvée fausse, en raison des simplifications relativement arbitraires lors du passage de 25 à 12 notes. D'autres choix auraient pu permettre de rendre cette quinte juste, mais cela n'aurait fait que déplacer le problème car c'est alors une autre quinte qui aurait été fausse.

Question : Calculer l'intervalle correspondant à la « quinte du loup »

(peut se faire par valeur approchée en utiliser les valeurs obtenues par tableur : rapport entre 2f et la 11$^{\text{ème}}$ fréquence ou en donnant les informations : $f_{mi\flat} = \frac{2^5}{3^3}f$ et $f_{sol\#} = \frac{3^8}{2^{12}}f$)

La difficulté de transposition reste bien présente. En effet, il faudrait conserver les intervalles entre les notes, sinon on arriverait sur des fréquences qui ne correspondent à aucune note des gammes.
D'autres gammes ont été créées (gamme de Zarlino, tempérament mésotonique, …) mais aucune ne répondait à ce problème

Commentaire : on peut demander aux élèves de faire une recherche sur la gamme de Zarlino ou gamme des physiciens car obtenue par génération d'harmoniques naturels, qui utilise la tierce (intervalle égal à $\frac{5}{4}$) et supprime le problème de la quinte du loup.

I. Gamme tempérée

Le développement de l'algèbre, puis des calculs à l'aide de nombres irrationnels a permis, au XVIIe siècle, d'apporter une solution au problème de transposition par la construction de gammes à intervalles égaux. Parmi les musiciens ayant essayé de résoudre les difficultés précédemment citées, on trouve des scientifiques comme Simon Stevin, Johann Kepler, et Leonhard Euler. Mais on attribue généralement à Andreas Werckmeister l'invention du tempérament égal.
Il s'agit de diviser une octave en douze intervalles égaux, chacun étant égal à un demi-ton.
Le rapport d'octave étant égal à 2, on cherche donc un rapport x tel que $x^{12} = 2$

1. Définition de la racine douzième de 2.

a. Soit a un réel positif. Rappeler la définition de $\sqrt{a}$.

De manière analogue, on peut définir la racine douzième d'un réel positif a.

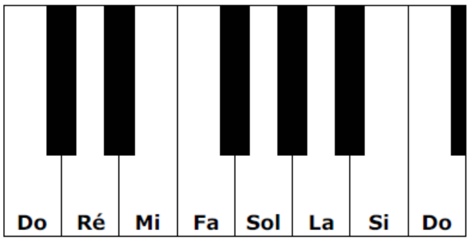
Définition : Soit a un réel strictement positif. On appelle racine douzième de a, le réel positif x tel que $x^{12} = a$. On le note $a^{\frac{1}{12}}$ ou encore $\sqrt[12]{a}$. Ainsi :

la racine douzième de 2 est le nombre réel positif x tel que $x^{12} = 2$ soit : $x = 2^{\frac{1}{12}}$

Donc $2^{\frac{1}{12}}$ est l'intervalle définissant le **demi-ton tempéré**.

Sur la calculatrice, on tape 2 ^ (1/12).
Compléter : $2^{\frac{1}{12}} \approx$ …… et $\frac{256}{243} \approx$……. (arrondir à 10^{-3} près)

On peut utiliser les propriétés des puissances. (demander aux élèves de les rappeler)



2. Quel est l'intervalle définissant un ton tempéré?
3. **a.** En vous aidant des touches du piano, compléter le tableau suivant :

Note	do_3	$ré_3$	mi_3	fa_3	sol_3	la_3	si_3	do_4
Fréquence (en Hz)	261,63							

(Attention au demi-ton entre mi et fa et Si et do)
On peut utiliser un tableur

b. Comparer avec les valeurs des fréquences obtenues dans l'exercice 2.

c. Bien évidemment, on peut ainsi déterminer les fréquences des douze notes de la gamme chromatique, qui seront assez proches des 12 notes de la gamme Pythagoricienne. On garde les mêmes noms.

Soit $n \in \{0; 1; 2; \dots ; 11\}$
Exprimez à l'aide d'une puissance de 2 et de f la fréquence f_n de toute note dont la fréquence est dans $[f; 2f]$

4. Calculer les intervalles suivants, et les comparer avec les intervalles correspondant dans la gamme de Pythagore :
   a. Do-Sol : la quinte
   b. Do-Fa : la quarte

5. Avec la gamme de Pythagore (mais aussi celle de Zarlino) la transposition entrainait un changement de sonorité des notes dû aux intervalles inégaux et obligeait donc à changer d'instrument. La transposition est donc bien plus simple avec la gamme tempérée puisqu'il s'agit désormais tout simplement « d'ajouter » à toute les notes de la partition un intervalle choisit.
   Exemple : Si l'on joue do, ré, mi, do et que l'on souhaite transposer de 2 tons supérieurs, quelles notes obtient-on ?
   Cette gamme apporte donc une modularité complète et sans limite puisque le problème de la quinte du loup n'est pas présent dans cette gamme.

6. **Un sacrifice sur la justesse.** Si cette gamme est plus pratique, c'est parce qu'elle fait des concessions sur la justesse des notes.
   Il n'est plus question de quinte ou de tierce pure comme pour les gammes de Pythagore car les intervalles ont été coupé arbitrairement. Toutefois, les notes restant pour autant proches des notes pures, c'est la gamme qui s'est imposée.
   Compléter le tableau suivant :

Note	do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
Pythagore Valeurs exactes	1	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^5}{2^7}$	2
Valeurs approchées	1	1,125						
Temp. Egal Valeurs exactes	1	$2^{\frac{1}{6}}$						
Valeurs approchées	1							

Complément : D’autres solutions ont été imaginées. Par exemple dans les années 80, l’accordeur Serge Cordier a imaginé et expérimenté le tempérament égal à quintes justes (TEQJ) dans lequel il donne la priorité à la quinte sur l’octave. Pour cela il agrandit légèrement l’octave.

Pour aller plus loin : de la gamme chromatique vers les congruences - groupe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$