Démonstrations
$\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
Les compétences : représenter, raisonner, chercher, communiquer.

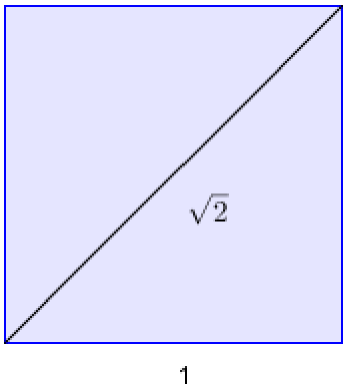
Comment aborder $\sqrt{2}$ et la démonstration de son irrationalité en seconde ?

1 Approche historique : les babyloniens

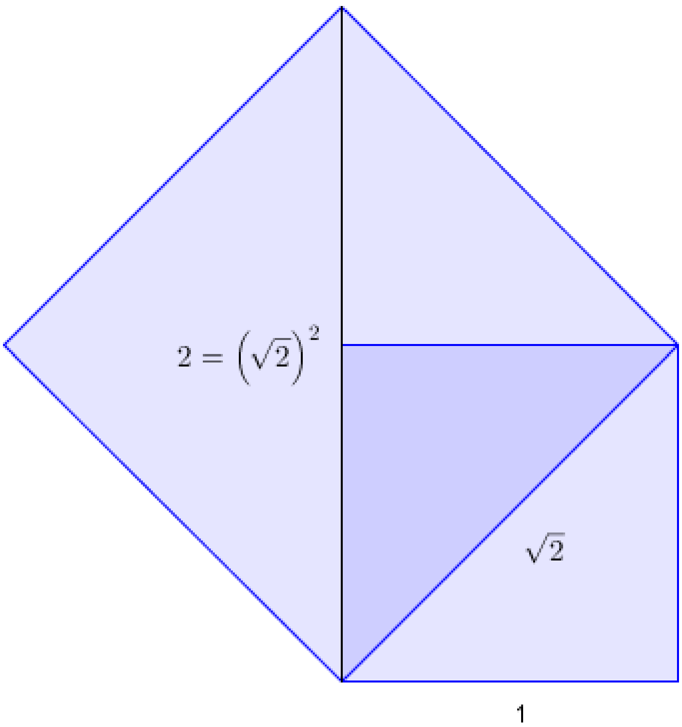
1.1 construction et la duplication du carré

Platon à Aristote : comment dupliquer un carré de côté 1 ?
Sur GeoGebra :

1. Construction à la règle et au compas de $\sqrt{2}$: Avec un menu restreint construire le carré de côté 1.
2. Déterminer la longueur exacte de la diagonale.



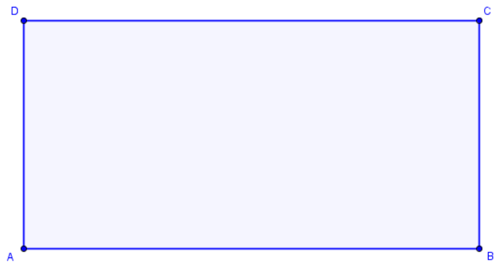
3. Construire un carré dont l'aire est 2.



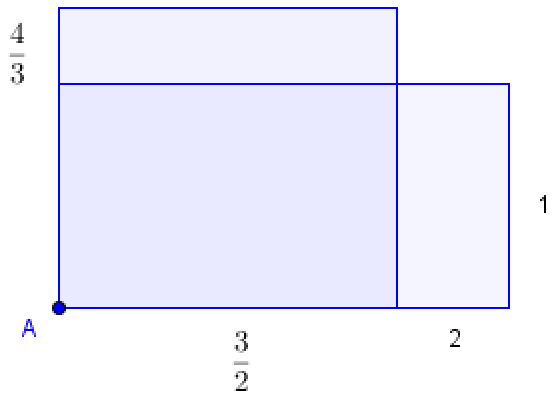
Remarque :
Soit un carré de côté a, le rapport des longueurs de la diagonale par le côté est $\sqrt{2}$, il ne dépend pas de a.

1.2 Approximation de racine de 2 : algorithme

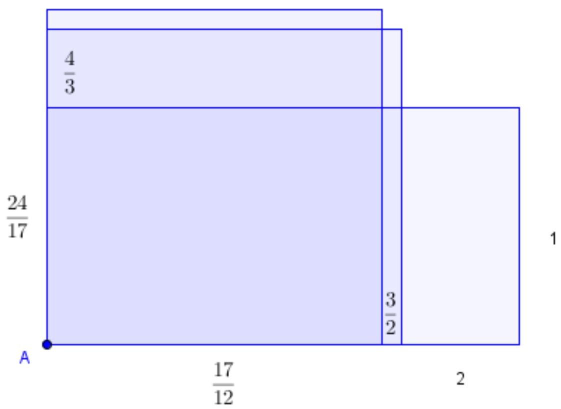
Problème : Soit un rectangle de côté $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$. Trouver un carré de même aire que ce rectangle (identique au carré précédemment construit) :
sur GeoGebra (menu non restreint) : ABCD est le rectangle initial.



- à partir du rectangle de côté $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$, construire le rectangle de côté $a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ et $b_1 = \dfrac{2}{a_1}$.
  Difficulté : tracer le double de l'inverse d'un nombre



- Procéder ainsi pour les rectangles suivants.
  Remarque : on peut créer un outil permettant de réitérer la figure autant de fois que l'utilisateur le souhaite.



- Ce principe permet de déterminer des décimales de $\sqrt{2}$. On peut donner un algorithme sur Python.

```python
#algorithme de babylone approximation de racine de 2 et premières décimales :


from math import*

def babylone(e): #e donne la précision de racine de 2 à 10^e
    a=1
    b=2
    i=0
    while abs(a-b)>pow(10,e):
        i=i+1
        a=(a+b)/2
        b=2/a
    return [a,b,i]

print(babylone(-15))
```

racine_2_babylone.py

remarque : on peut se passer de la valeur absolue en remplaçant $abs(b-a) > pow(10, e)$ *par* $b - a > pow(10, e)$ *or* $a - b > pow(10, e)$.

On obtient le résultat suivant : `[1.4142135623746899, 1.4142135623715002, 4]`

On peut aussi donner un programme qui retourne les fractions irréductibles des termes a et b :

```python
#algorithme de babylone approximation de racine de 2 et premières décimales :


from math import*

def pgcd(p,q) :
    if p<q:
        a=p
        b=q
    else :
        a=q
        b=p
    r=b
    while r!=0:
        r=a%b
        a=b
        b=r
    return a


def reduction_fraction(p,q):
    d=pgcd(p,q)
    return [p/d,q/d]

def add_fraction(a,b):
    return reduction_fraction(a[0]*b[1]+b[0]*a[1],a[1]*b[1])

def babylone_fraction(e):
    a=[1,1]
    b=[2,1]
    i=0
    while abs(a[0]/a[1]-b[0]/b[1])>pow(10,-14):
        i=i+1
        a[0]=add_fraction(a,b)[0]
        a[1]=add_fraction(a,b)[1]*2
        a[0]=reduction_fraction(a[0],a[1])[0]
        a[1]=reduction_fraction(a[0],a[1])[1]
        b[0]=2*a[1]
        b[1]=a[0]
        b[0]=reduction_fraction(b[0],b[1])[0]
        b[1]=reduction_fraction(b[0],b[1])[1]
    return [a,b,i]

print(babylone_fraction(-14))
```

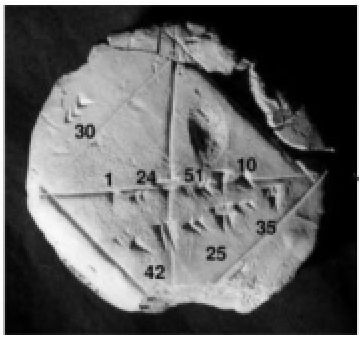
racine_2_babylone_fraction.py

On obtient les résultats suivants :

```
[[665857.0, 470832.0], [941664.0, 665857.0], 4]
```

- Soient les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \dfrac{2}{a_{n+1}}$.
  Ces suites sont adjacentes, elles convergent vers $\sqrt{2}$.
  Un prolongement est possible en classe de première et en classe de terminal (variations et comparaison des suites, convergence, méthode de Newton).
  On a $a_4 = \dfrac{665857}{470832}$ et $b_4 = \dfrac{941664}{665857}$,
  a_4 et b_4 donnent une valeur approchée à au moins 10^{-6} de racine de 2 : $\sqrt{2} \simeq 1,4142135$.

Est-ce que l'algorithme s'arrête ? peut-on trouver un carré à un moment ?
Avec Python, au bout de 5 étapes on a une précision de 10^{-15}.



Les babyloniens avaient trouvé l'approximation suivante (ils travaillaient en base 60) :
$1 + \dfrac{24}{60} + \dfrac{51}{60^2} + \dfrac{10}{60^3} \simeq 1,4142129$

1.3 $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal

Raisonnons par l'absurde :
proposition $\mathcal{P}$: $\sqrt{2}$ est un nombre décimal.
si $\mathcal{P}$ est vraie i.e si $\sqrt{2}$ est égal à un nombre décimal x alors il existe une dernière décimale non nulle d ($d \in [\![1\ ;\ 9]\!]$), le rang de d est plus grand que 15, le nombre de décimales obtenues à la calculatrice ou avec le programme sur Python) :
en faisant le carré de $\sqrt{2}$ on obtient 2 qui doit être égal à x^2, ce produit aura pour dernière décimale u la dernière décimale de d^2 (il suffit de poser la multiplication, cette dernière est située à plus de 30 chiffres après la virgule). Or, par définition de d, cette décimale est nécessairement différente de 0. Le carré de ce nombre décimal ne peut être l'entier 2 (la contradiction).
Par contradiction la proposition $\mathcal{P}$ est fausse et la négation de $\mathcal{P}$ est vraie i.e $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal.

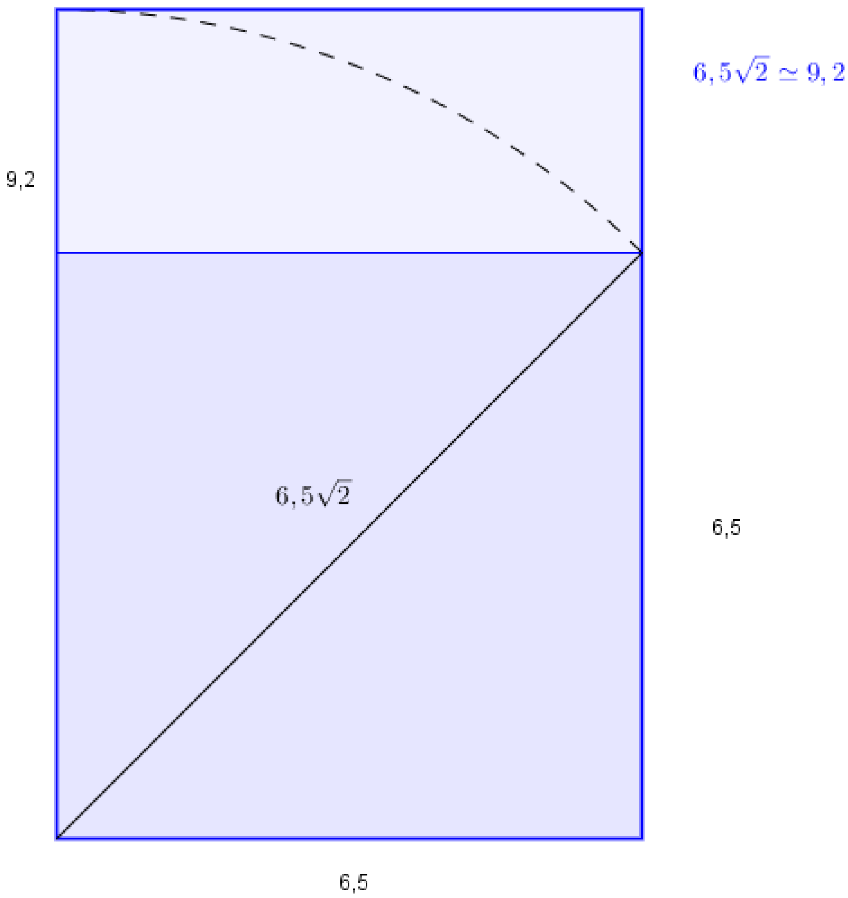
Remarque : $\sqrt{2}$ est incommensurable.

1.4 Les rectangles de l'harmonie

1.4.1 L'harmonie des mesures

La porte d'Harmonie à Annemasse - Michel Ventrone.
Dimensions : 9,2 m de long sur 6,5 m de large.
`http://images.math.cnrs.fr/La-porte-d-harmonie.html`
Benoît Rittaud.

Remarque : $\dfrac{9,2}{6,5} \simeq 1,415385$.
La particularité de ce rectangle est cette construction :



1.5 Le format papier

1.5.1 Une propriété générale

Soit un carré ABCD de côté a, a est un entier naturel non nul.

Définition : On dira qu'un rectangle de côté a, b ($a < b$) est d'harmonie si $\dfrac{b}{a} = \sqrt{2}$.

Propriété : Soit un rectangle d'harmonie $\mathcal{R}$ et son axe de symétrie Δ perpendiculaire à sa longueur.
On définit ainsi deux autres rectangles $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ isométriques.
Montrer que le rectangle $\mathcal{R}_1$ (et $\mathcal{R}_2$) est d'harmonie.

1.5.2 Application au format papier

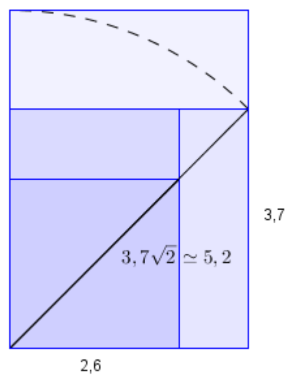
1. Déterminer les longueurs des côtés d'un rectangle d'harmonie d'aire 1 :
   $a^2\sqrt{2} = 1 \Longleftrightarrow a = \sqrt{\sqrt{2}}$.

   Le rectangle a pour côté $\sqrt{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$.

2. Retrouver les formats de papiers standards :

Format	Taille exacte (m)	taille approximative (mm)	aire (m^2)
A0	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt{2}}$	841×1189	1
A1	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$	595×841	$\frac{1}{2}$
A2	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{2}$	420×595	$\frac{1}{4}$
A3	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{4} \times \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$	297×420	$\frac{1}{8}$
A4	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{4}$	210×297	$\frac{1}{16}$
A5	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{8} \times \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}}$	149×210	$\frac{1}{32}$
A6	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{8\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{8}$	105×149	$\frac{1}{64}$
A7	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{16} \times \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{8\sqrt{2}}$	74×105	$\frac{1}{128}$
A8	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{16\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{16}$	53×74	$\frac{1}{256}$
A9	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{32} \times \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{16\sqrt{2}}$	37×53	$\frac{1}{512}$
A10	$\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{32\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{32}$	26×37	$\frac{1}{1024}$

Premières constructions :



Programme sur Python :

```
#format papier en mm arrondi à l'unité

from math import*

def largeur_rectangle(a):
    return a/sqrt(2)

a=sqrt(sqrt(2))*1000
for i in range(0,11):
    print('Format A',i,' : ', round(largeur_rectangle(a),0),' x ',round(a,0))
    a=largeur_rectangle(a)
```

racine_2_format_papier.py

On obtient le résultat suivant :

```
Format A 0  :  841.0  x  1189.0
Format A 1  :  595.0  x  841.0
Format A 2  :  420.0  x  595.0
Format A 3  :  297.0  x  420.0
Format A 4  :  210.0  x  297.0
Format A 5  :  149.0  x  210.0
Format A 6  :  105.0  x  149.0
Format A 7  :  74.0  x  105.0
Format A 8  :  53.0  x  74.0
Format A 9  :  37.0  x  53.0
Format A 10  :  26.0  x  37.0
```

Le format A_n est définie pour tout entier relatif par : $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}^{n+1}} \times \dfrac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}^{n}}$. L'aire d'un tel rectangle est 2^{-n}.

Le format 2A0 qu'on peut noter A_{-1} est $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}^{0}} \times \dfrac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}^{-1}}$ i.e $\sqrt{\sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{2}$ soit approximativement 1189×1682 , son aire est 2.

Un autre programme sur Python donne :

```
#format papier en mm arrondi à l'unité

from math import*

def taille(n): #n est le format, un entier relatif
    return [round(sqrt(sqrt(2))/pow(sqrt(2),n+1)*1000,0),round(sqrt(sqrt(2))/pow(sqrt(2),n)*1000,0)]

for n in range(-10,11):
    print('Format A',n,' : ', taille(n)[0],' x ',taille(n)[1],' aire : ',pow(2,-n))
```

racine_2_format_papier_bis.py

On obtient le résultat suivant :

```
Format A -10  :  26909.0  x  38055.0  aire :  1024.0
Format A -9  :  19027.0  x  26909.0  aire :  512.0
Format A -8  :  13454.0  x  19027.0  aire :  256.0
Format A -7  :  9514.0  x  13454.0  aire :  128.0
Format A -6  :  6727.0  x  9514.0  aire :  64.0
Format A -5  :  4757.0  x  6727.0  aire :  32.0
Format A -4  :  3364.0  x  4757.0  aire :  16.0
Format A -3  :  2378.0  x  3364.0  aire :  8.0
Format A -2  :  1682.0  x  2378.0  aire :  4.0
Format A -1  :  1189.0  x  1682.0  aire :  2.0
Format A 0  :  841.0  x  1189.0  aire :  1.0
Format A 1  :  595.0  x  841.0  aire :  0.5
Format A 2  :  420.0  x  595.0  aire :  0.25
Format A 3  :  297.0  x  420.0  aire :  0.125
Format A 4  :  210.0  x  297.0  aire :  0.0625
Format A 5  :  149.0  x  210.0  aire :  0.03125
Format A 6  :  105.0  x  149.0  aire :  0.015625
Format A 7  :  74.0  x  105.0  aire :  0.0078125
Format A 8  :  53.0  x  74.0  aire :  0.00390625
Format A 9  :  37.0  x  53.0  aire :  0.001953125
Format A 10  :  26.0  x  37.0  aire :  0.0009765625
```

2 démonstrations : $\sqrt{2}$ est irrationnel

Résultats préliminaires :

- Le carré d'un entier pair est pair, le carré d'un entier impair est pair.

2.1 Aristote : parité, deux démonstrations

Proposition $\mathcal{P}$: $\sqrt{2}$ est rationnel. Soit $\mathcal{P}$ est vraie soit $\overline{\mathcal{P}}$ est vraie.
Si $\mathcal{P}$ est vraie, il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}(*)$ et p le plus petit possible.
$p^2 = 2q^2$. Ainsi p^2 est pair et p est pair. Il existe un nombre p' entier naturel non nul tel que $p = 2p'$, ainsi $p^2 = 2q^2 \iff 2p'^2 = q^2 \iff \sqrt{2} = \dfrac{q}{p'}$ avec $0 < q < p$ (d'après (*)) ce qui contredit p minimal.
Par contradiction, la proposition $\mathcal{P}$ est fausse ainsi la négation de $\mathcal{P}$ est vraie i.e $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Proposition $\mathcal{P}$: $\sqrt{2}$ est rationnel.Soit $\mathcal{P}$ est vraie soit $\overline{\mathcal{P}}$ est vraie.
Si $\mathcal{P}$ est vraie, il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ et p et q les plus petits possibles (les deux ne peuvent pas être pair, nécessairement un d'eux est impair).
$p^2 = 2q^2$. Ainsi p^2 est pair et p est pair. Il existe un nombre p' entier naturel non nul tel que $p = 2p'$, ainsi $p^2 = 2q^2 \iff 2p'^2 = q^2$ q^2 est pair donc q est pair, ce qui contredit la minimalité de p et q.
Par contradiction, la proposition $\mathcal{P}$ est fausse ainsi la négation de $\mathcal{P}$ est vraie i.e $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2.2 Euclide : soustraction réciproque

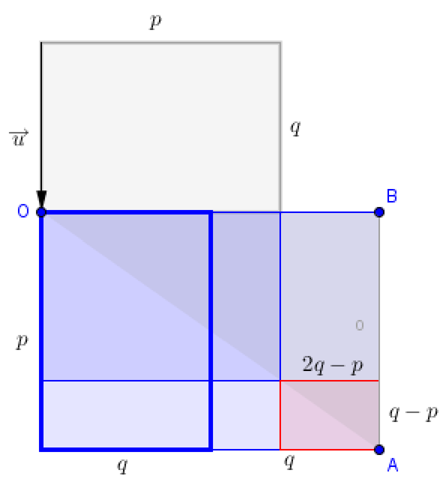
Proposition $\mathcal{P}$: $\sqrt{2}$ est rationnel. Soit $\mathcal{P}$ est vraie soit $\overline{\mathcal{P}}$ est vraie.
Si $\mathcal{P}$ est vraie, il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ et p le plus petit possible.

$p^2 = 2q^2 \iff p(p-q) = p^2 - pq = 2q^2 - pq = q(2q-p) \iff \dfrac{p}{q} = \dfrac{2q-p}{p-q} = \sqrt{2}$.

Or $0 < p < q$ donc $0 < p - q$, $0 < \dfrac{p}{q}$ donc $0 < \dfrac{2q-p}{p-q}$ et $0 < 2q - p$ soit $p - 2q < 0$.
ainsi $0 < p - q < q$, cette inégalité contredit la minimalité de q.
Par contradiction, la proposition $\mathcal{P}$ est fausse ainsi la négation de $\mathcal{P}$ est vraie i.e $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2.3 Une démonstration géométrique, Euclide-suite

Proposition $\mathcal{P}$: $\sqrt{2}$ est rationnel. Soit $\mathcal{P}$ est vraie soit $\overline{\mathcal{P}}$ est vraie.
Si $\mathcal{P}$ est vraie, il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ et p et q le plus petit possible.
Le rectangle de côté p et q est d'harmonie et on a $0 < q < p$.
On construit le symétrique de ce rectangle par rapport à une de ses longueurs, le rectangle de côté p et $2q$ est d'harmonie $\left(\dfrac{2q}{p} = \dfrac{2q}{\sqrt{2}q} = \sqrt{2}\right)$.
Après une rotation de centre O et d'angle 90° du rectangle initial, on obtient le rectangle grisé, puis une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ de ce rectangle donne la figure suivante.



La configuration du triangle AOB et l'application du théorème de Thalès permettent d'affirmer que le petit rectangle rouge de côtés $2q-p$ et $q-p$ est d'harmonie $\left(\dfrac{2q}{2q-p}=\dfrac{p}{q-p} \Longleftrightarrow \dfrac{2q-p}{q-p}=\dfrac{2q}{p}=\sqrt{2}\right)$.
La longueur et la largeur de ce rectangle contredisent la minimalité de la longueur et de la largeur du rectangle initial.
De plus on pourrait continuer la suite de rectangle à l'infini, on obtiendrait deux suites (la longueur et la largeur des côtés de rectangles d'harmonie) infinies d'entiers naturels strictement décroissantes, ce qui est aussi une contradiction.
Par contradiction, la proposition $\mathcal{P}$ est fausse ainsi la négation de $\mathcal{P}$ est vraie i.e $\sqrt{2}$ est irrationnel.

3 Annexes :

Quelques dates

- Les babyloniens : située en Mésopotamie, Babylone est une ville située à 100 km au sud de l'actuel Bagdad en Irak. Près de 400 tablettes ont été mise à jour depuis 1850, elles datent de 1800 à 1600 ans av J.C. et elles traitent des fractions, des équations algébriques (second degré et troisième degré), de calculs d'hypoténuse et de triplets Pythagoriciens et de l'approximation de $\sqrt{2}$. La chute des babyloniens est en 539 av J.C.
- Thalès de Milet, appelé communément Thalès est un philosophe et savant grec né à Milet vers 625 av J.C. et mort vers 547 av. J.C. dans cette même ville.
- Pythagore est un réformateur religieux et philosophe, mathématicien et scientifique qui serait né aux environs de 580 av. J.-C. à Samos, une île de la mer Égée au sud-est de la ville d'Athènes ; on établit sa mort vers 495 av. J.-C., à l'âge de 85 ans.
- Platon (né en 428 av. J.-C. et mort en 348 av. J.-C. à Athènes) est un philosophe antique grec.
- Aristote (né en 384 av. J.-C. mort en 322 av. J.-C.) est un philosophe antique grec.
- Euclide est un mathématicien de la Grèce antique, auteur d'éléments de mathématiques, qui constituent l'un des textes fondateurs de cette discipline en Occident. Aucune information fiable n'est parvenue sur la vie ou la mort d'Euclide ; il est possible qu'il ait vécu vers 300 av. J.C.

Bibliographie :

- B. Rittaud, Le fabuleux destin de racine de 2, Le Pommier, 2006 (article éponyme paru dans la Gazette de la SMF).
- M. Caveing, L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide, Septentrion, 1998
- Vidéo conférence de B.Rittaud - CNRS - `https://audimath.math.cnrs.fr/videos/2018-03-29-Rittaud.mp4` - 20 minutes.
- Conférence de B.Rittaud - histoire de racine de 2 -`https://mathix.org/linux/archives/6474` - 2 heures.
- Salomon Ofman. Une nouvelle démonstration d'irrationalité de racine carrée de 2 d'après les Analytiques d'Aristote. Philosophie antique - problèmes, renaissances, usages , Presses universitaires du Septentrion, 2010, 10 (1), pp.81-138. `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01054890/document`

4 Différenciation

4.1 Introduction de $\sqrt{2}$: une séance

Travaux Pratiques : Approche historique de $\sqrt{2}$ et approximation de $\sqrt{2}$.
Partie A : $\sqrt{2}$ en géométrie.
On peut ne donner que le problème ouvert :
Platon à Aristote : comment dupliquer un carré de côté 1 ?
Partie B : approximation de $\sqrt{2}$ algorithme de Babylone.
On donne les figures successives pour passer d'un rectangle de côté 1 et 2 à un carré de même aire.

4.1.1 Contenus - productions

Varier l'approche algorithmique :

- algorithme/programme à compléter.
- algorithme/programme à trou.
- Donner l'algorithme du premier programme à la main et produire un tableau à la main de l'exécution. Puis demander une traduction de l'algorithme sur Python.
- recherche complète de l'algorithme/programme (utiliser Scratch si l'élève se sent plus à l'aise avec Scratch).

On a vu que deux algorithmes sont possibles, deux approches possibles en classe :

- Tous les élèves traitent le premier algorithme, le deuxième est à proposé aux élèves les plus rapides.
- Les meilleurs élèves traitent directement l'algorithme 2.

La production est l'algorithme ou les algorithmes.

Autre algorithme pour une approximation de $\sqrt{2}$: dichotomie

```python
#algorithme de babylone approximation de racine de 2 et premières décimales :
from math import*


def approximation(e): #e donne la précision de racine de 2 à 10^(e)
    a=1
    b=2
    while b-a>pow(10,e):
        m=(a+b)/2
        if pow(m,2)<2 :
            a=m
        else:
            b=m
    return m
```

racine_2_dichotomie.py

$approximation(-15)$ donne 1.414213562373095

4.1.2 Processus

L'enseignant peut faire une figure itérative pour bien comprendre les étapes, cette figure peut-être réalisée sur GeoGebra avec la création d'outils.

Remédiation-coup de pouces en algorithmique : l'utilisation du tableur permet de décomposer le problème, la mise en évidence des formules permet de comprendre les affectations et le principe d'une boucle est mis en évidence à partir d'un glisser-coller :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	étape i	a	b	aire	précision			
2	0	1	2	2	1	'=B2*C2	'=abs(C2-B2)	
3	1	1,5	1,333333333	2	0,16666666667	'=(B2+C2)/2	'=2/B3	'=D$2/B3
4	2	1,416666667	1,411764706	2	0,00490196078			
5	3	1,414215686	1,414211438	2	4,2477996E-06			
6	4	1,414213562	1,414213562	2	3,1896707E-12			
7	5	1,414213562	1,414213562	2	0			
8								

On voit la limite des calculs du tableur, l'algorithme converge très vite.
La calculatrice donne des décimales de $\sqrt{2}$ et l'algorithme de Babylone donne une approximation de $\sqrt{2}$.

4.1.3 Structure

seul ou en binôme, ici la structure de groupe dépend du degré d'autonomie que vous attendrez de vos élèves.

4.2 applications : pourquoi étudier $\sqrt{2}$

L'exercice peut être introduit en classe et à finir à la maison.

4.2.1 Structure

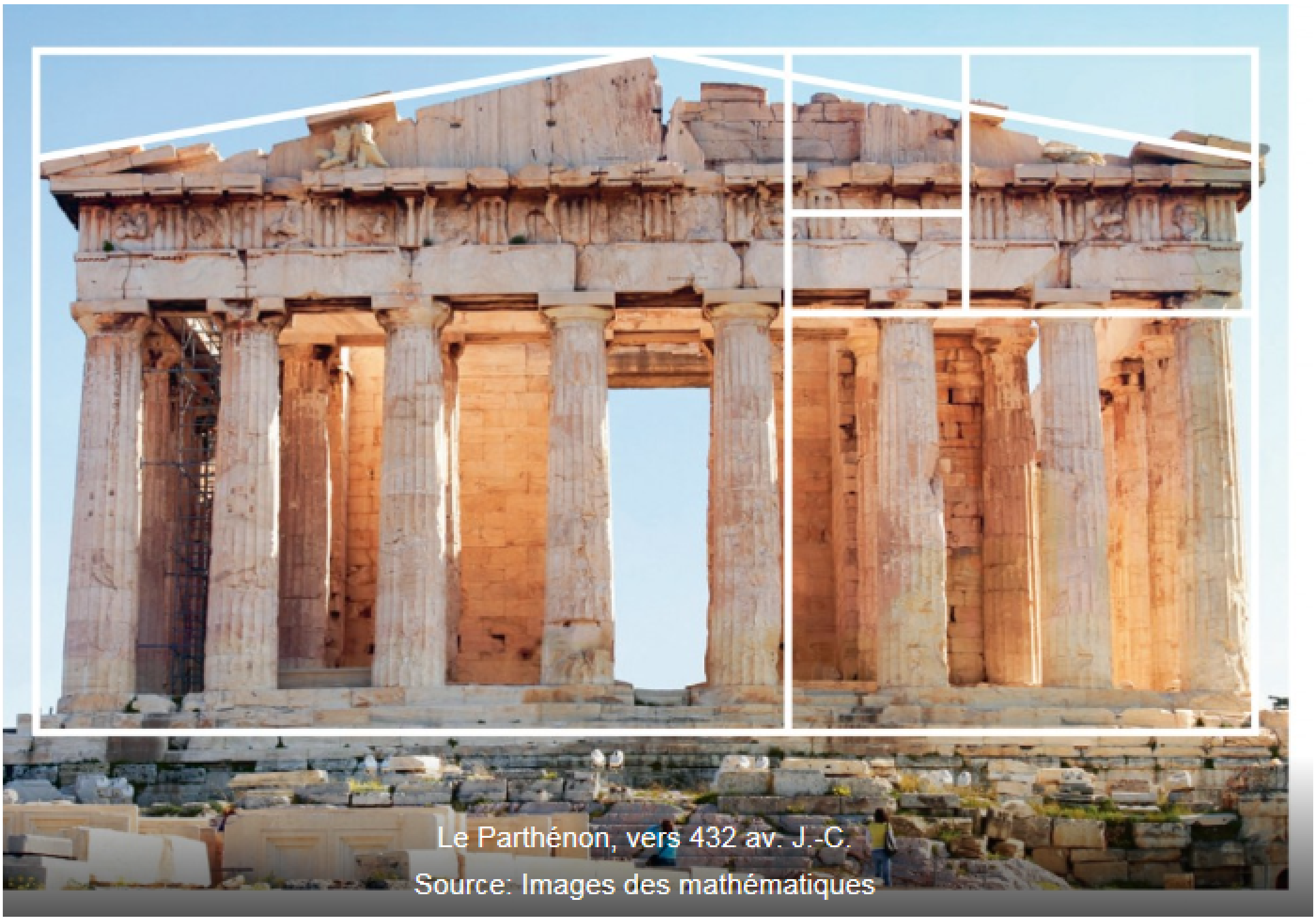
binôme ou quatre élèves par groupe.

4.2.2 Contenus

Outre l'intérêt historique, on peut donner deux applications :

- La porte d'Harmonie (art)
- le format papier

Le groupe d'élèves choisit de travailler sur le thème de son choix, ça permet une plus grande motivation.
Le travail sur la porte d'Harmonie peut être prolongé par celui du rectangle d'Or et la comparaison des deux rectangles.



4.2.3 Productions

Organiser une sortie permet de concrétiser les travaux réalisés en classe. On peut travailler avec d'autres enseignants pour avoir une approche interdisciplinaire (monde de l'entreprise, spécificité des entreprises, l'intérêt des mathématiques dans le monde des entreprises). Cette approche permet de travailler aussi l'orientation des élèves.

- Annemasse-Lac Léman (74)
- Usine de papier à Saint-Junien (87)

À l'issu des travaux on peut demander de faire une petite exposition dans un format papier choisi :

- Reproduire la porte d'Annemasse avec une échelle raisonnable et expliquer cette porte. Comparer avec le Parthénon.
- Le format papier.

Remarque : certaines parties de nos programmes peuvent être présentées durant la semaine des Mathématiques ou autres événements (portes ouvertes etc...)

4.2.4 Processus

Ces travaux sont des processus pour comprendre le nombre $\sqrt{2}$ par des approches concrètes, on travail le calcul, la représentation géométrique, l'algorithmique (figures itératives), autant de représentations du nombre $\sqrt{2}$: la compétence représenter.

Avec $\sqrt{a}$ où $a > 0$:

compétence représenter	maîtrise insuffisante	maîtrise fragile	maîtrise satisfaisante	très bonne maîtrise	non évaluée
effectuer des calculs avec $\sqrt{a}$					
connaître et utiliser une valeur décimale de $\sqrt{a}$					
construire et utiliser la géométrie de $\sqrt{a}$					

Cette grille serait communiquée aux élèves avant les travaux et évaluée à la fin des travaux.

4.3 Les démonstrations, racine de $\sqrt{2}$ est irrationnel

4.3.1 Contenus

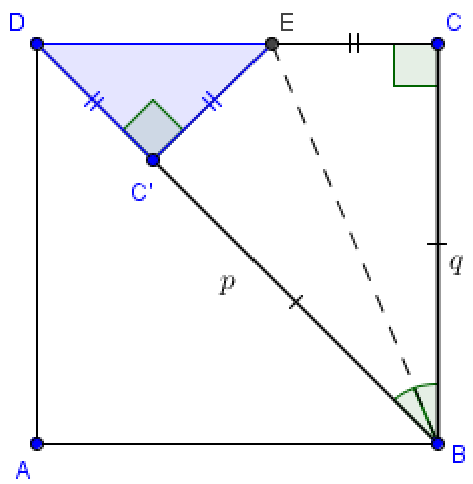
Les élèves ayant choisit La porte d'Harmonie d'Annemasse pourront travailler plus facilement sur la démonstration géométrique.
On peut donner au choix les trois démonstrations après avoir exposé le principe.
On peut proposer des questions pour aider aux démonstrations, faire une démonstration à trous ou laisser la démonstration ouverte et la refermer par des questions (pour le dernier exemple la gestion de classe serait collective).
Présenter deux démonstrations aux élèves permet de les faire choisir sur un apprentissage. On varie naturellement les processus.

Autre démonstration proposée par Maria Brunier :
Proposition $\mathcal{P}$: $\sqrt{2}$ est rationnel. Soit $\mathcal{P}$ est vraie soit $\overline{\mathcal{P}}$ est vraie.
Si $\mathcal{P}$ est vraie, il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$; p et q plus petits possibles.
$p^2 = 2q^2$.
Le dernier chiffre de p et de q est un chiffre, ainsi les derniers chiffres de p^2 et $2q^2$ sont :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$2q^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

Les seuls chiffres communs sont 0, p^2 est multiple de 10 et q^2 est multiple de 5, ainsi p est multiple de 10 et q est multiple de 5 (d'après la table au-dessus), 5 est un multiple commun à p et q, p et q ne réalise pas la minimalité attendue.
La proposition $\mathcal{P}$ est fausse, ainsi $\overline{\mathcal{P}}$ est fausse.

Autre démonstration proposée par le groupe PNF-2019 :
Proposition $\mathcal{P}$: $\sqrt{2}$ est rationnel. Soit $\mathcal{P}$ est vraie soit $\overline{\mathcal{P}}$ est vraie.
Si $\mathcal{P}$ est vraie, il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$; p et q plus petits possibles.
ABCD est un carré de côté q. La diagonale du carré mesure p.



Par manipulation, si on replie le côté $[BC]$ sur la diagonale $[BD]$ on obtient le triangle rectangle isocèle DEC' de côtés entiers $p-q$ et $q-(p-q)=2q-p$.
Ainsi on obtient $\sqrt{2}=\dfrac{2q-p}{p-q}$ avec $2q-p<q$ et $p-q<p$ ce qui contredit la minimalité de p et q.
$\mathcal{P}$ est fausse donc $\overline{\mathcal{P}}$ est vraie.

4.3.2 Productions

Toutes les démonstrations sont exposées et laissées à disposition des élèves, les élèves doivent s'en approprier au moins une.

4.3.3 Structure

Exemples d'organisations possibles :

- Une démonstration guidée avec des questions ou à trous : recherche seul avec le choix de la démonstration.
- Une démonstration ouverte : recherche collective par groupe.
- Au moins deux démonstrations accompagnées : recherche collective en classe entière.

Dans les deux premiers cas, il faut un moment de communication des démonstrations, des élèves peuvent présenter la démonstration qu'ils ont choisie. À l'issu des présentations les démonstrations sont proposés sur un réseau afin que tous les élèves aient chacune des démonstrations exposées.

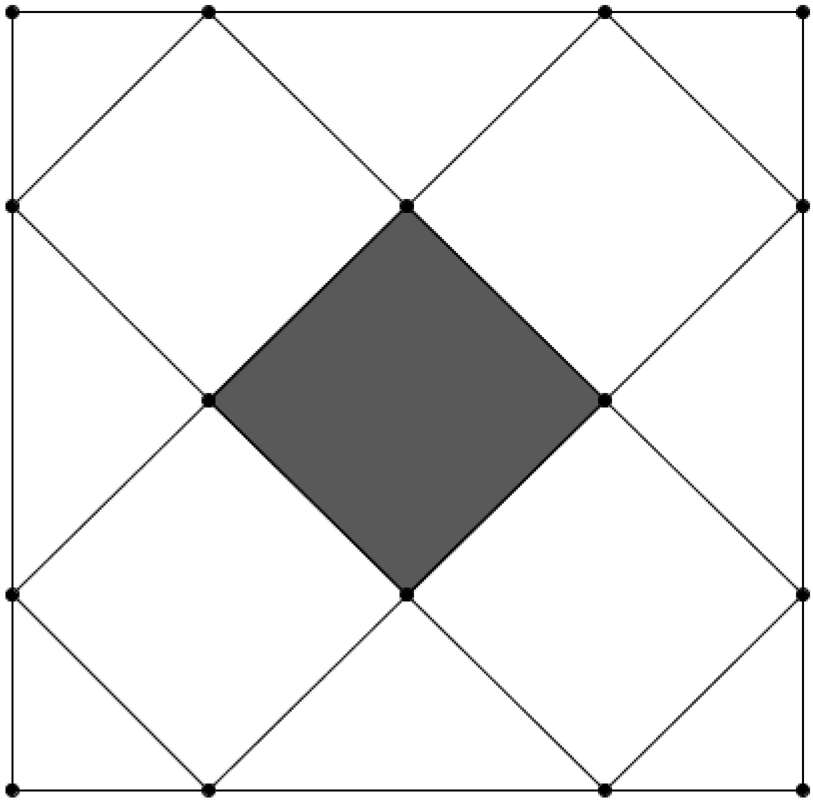
4.3.4 Processus

Les différents raisonnements exposés forment les processus des démonstrations de $\sqrt{2}$.
Toutes les démonstrations sont des processus pour le raisonnement par l'absurde.

4.4 Un bel exercice pour reprendre les idées illustrées

D'après un exercice des jeux mathématiques du site `futura-sciences.com` ; exercice proposé par Hervé Lenhing.

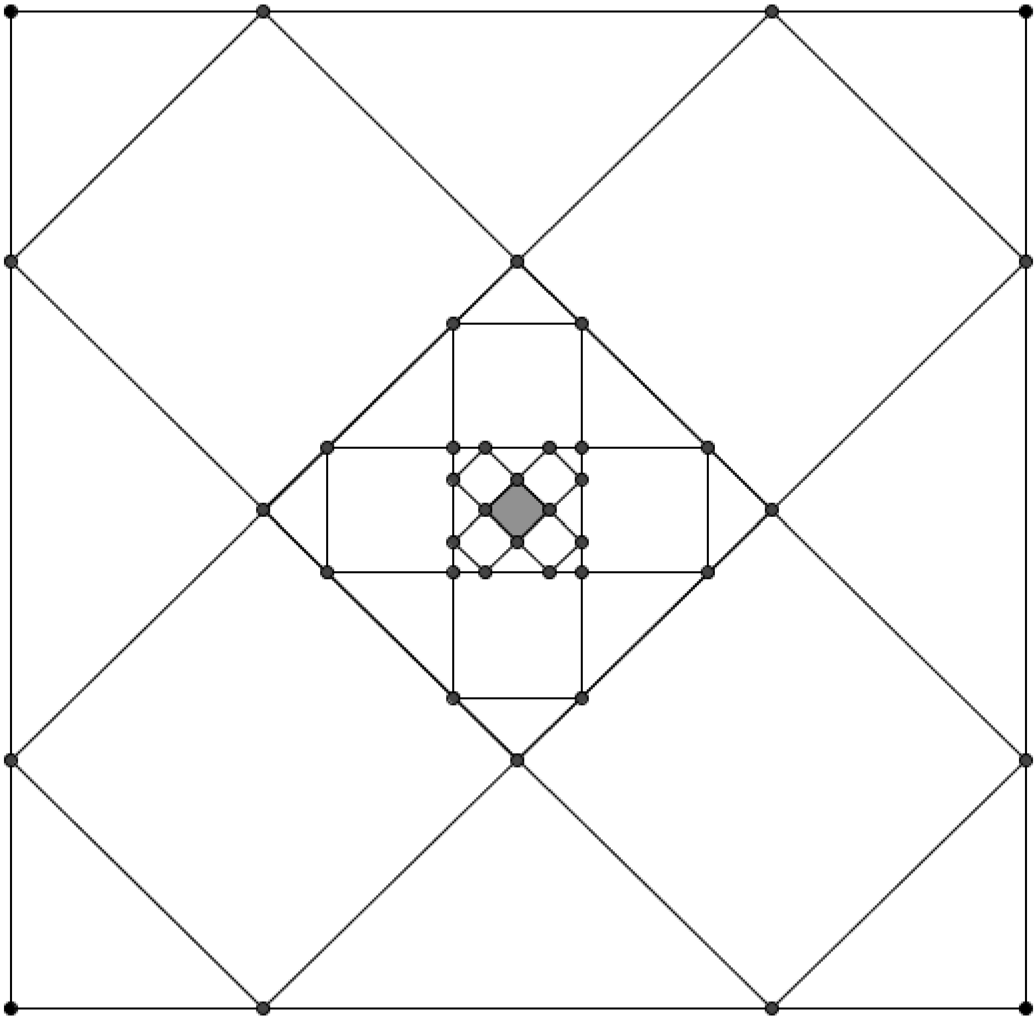
Quelle est l'aire du carré grisé sachant que le grand carré a pour aire 1024 unité d'aire.



Plusieurs approches sont possibles, la recherche du côté du rectangle grisé, la recherche du nombre de petits carrés qui forment la figure (puzzle).

Pour aller plus loin :

- Les élèves peuvent reproduire la figure. (des calculs sont intéressants, les élèves peuvent aussi repérer les axes de symétrie et remarquer que chaque côté est découpé en quart). Un élève qui ne démarre pas dans l'activité de la recherche de l'aire peut commencer par faire cette construction.
- On peut proposer une figure itérative (qui se construit avec la création d'un outil sur GeoGebra) :



suite à cet exemple, on peut demander au bout de combien d'étape l'aire d'un petit carré sera 1024^2 fois plus petite que l'aire du grand carré.

```
#petit carré grisé

aire=1024
n=0
while aire>1/1024 :
    aire=aire/8
    n=n+1
print(aire,n)
```

racine_2_petit_carre.py