

Calculs d'aires

1. Introduction

Ce thème est l'occasion de parcourir les différents cycles scolaires en travaillant les aires des figures planes et les volumes de l'espace usuels enrichis par la comparaison des méthodes, notamment par des approches historiques.

Les calculs d'aires en Terminale Mathématiques Complémentaires doivent notamment servir à l'introduction du calcul intégral. L'introduction du calcul intégral peut se faire à l'aide la méthode des rectangles, cette méthode met en évidence les notations du calcul intégral, Gottfried Wilhelm Leibniz (allemand 1646-1716) introduit le symbole de la somme \int , ancien s long, le d droit et suivi d'une variable x représentant une variation infinitésimale de x . Les calculs d'aires étant connus bien avant le calcul intégral, il est intéressant de comparer les méthodes. La quadrature de la parabole, de l'hyperbole, de la cycloïde, du cercle ont occupé de nombreux mathématiciens, dans ce document vous trouverez une piste d'activité pour la quadrature de la parabole par Archimède de Syracuse (287 av. J.-C. – 212 av.J.-C.) . La quadrature de l'hyperbole apparait dans le thème approche historique du logarithme. Lorsque l'expression d'une primitive manque, il est possible de calculer une aire par d'autres approches, en exemple dans ce document, la méthode de Monte-Carlo qui est construite sur des calculs probabilistes.

Il est aussi possible de prolonger le thème par des calculs de volumes usuels, c'est une occasion d'illustrer la méthode d'Archimède et des indivisibles de Bonaventura Cavalieri (italien 1598-1647).

Les différents calculs d'aires et de volumes proposés dans ce document s'appuient sur des notions de calculs d'aires des figures usuelles, les calculs d'intégrales, des calculs probabilistes par la méthode de Monte–Carlo. Ces calculs peuvent être exacts ou approchés et les approximations seront motivées par la réalisation de programmes en langage Python.

Enfin, les calculs d'aires se retrouvent dans les différents thèmes du programme de mathématiques complémentaires : modèle d'évolution, approche historique du logarithme, répartition des richesses et des inégalités, modèles définis par une fonction d'une variable.

2. Approximation d'une aire

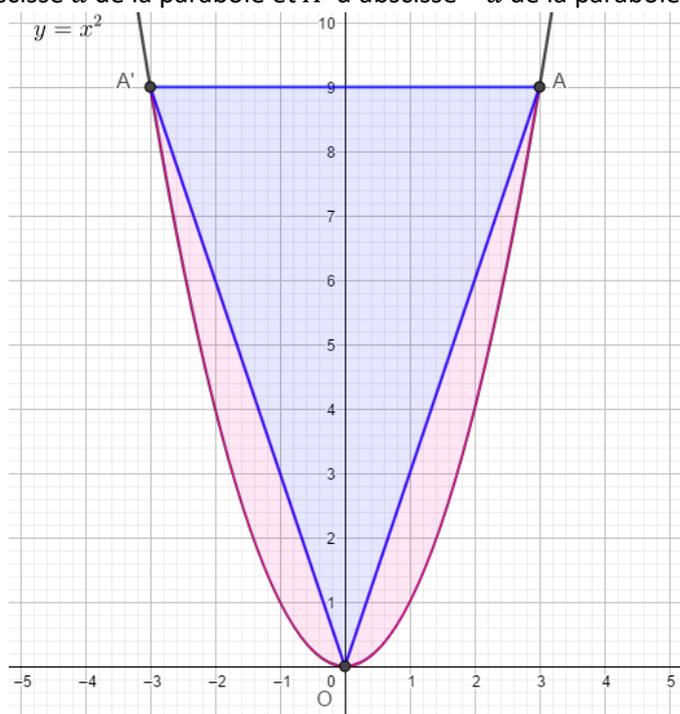
a. Quadrature de la parabole - Archimède

Les quadratures ont largement préoccupé les mathématiciennes et mathématiciens à travers les siècles. Le document d'accompagnement de l'histoire de la fonction logarithme, propose des pistes pour la quadrature de l'hyperbole.

La quadrature de la parabole a été résolue par Archimède de Syracuse (vers 287 av. J.-C. 212 av. J.-C).

Avec les élèves, on peut proposer le raisonnement d'Archimède dans un cas simple et admettre la généralisation signalée par (*).

Soit un repère orthonormé du plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et la parabole d'équation $y = x^2$, les points A d'abscisse a de la parabole et A' d'abscisse $-a$ de la parabole.

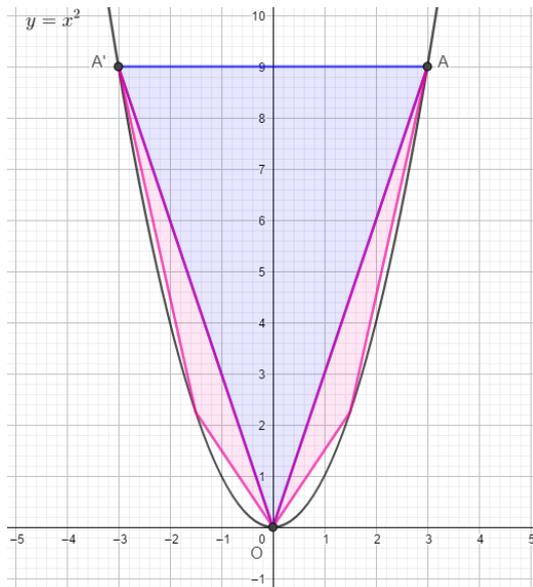


Dans cet exemple, la propriété d'Archimède est la suivante : l'aire \mathcal{A} au-dessus de la parabole et sous le segment $[AA']$ dans l'intervalle $[-a ; a]$ vaut quatre tiers de l'aire du triangle bleu $AA'O$, autrement dit l'aire de la partie rose vaut le tiers de l'aire du triangle bleu $AA'O$.

On peut vérifier ces affirmations à l'aide du calcul intégral :

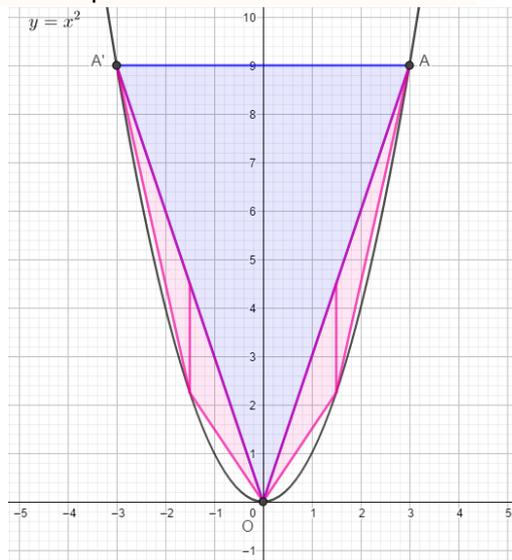
- Aire du triangle $AA'O$: $\frac{2a \times a^2}{2} = a^3$.
- Aire rose : $2 \int_0^a ax - x^2 dx = 2 \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = 2 \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{a^3}{3}$.
- Aire \mathcal{A} : $2a \times a^2 - 2 \int_0^a x^2 dx = 2a^3 - 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = 2a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3$.

Archimède ne disposait pas du calcul intégral, il a approché l'aire par itérations dichotomiques :



L'aire \mathcal{A} est approchée à cette étape par l'aire du triangle OAA' et l'aire des deux triangles roses :

- L'aire d'un triangle rose se détermine en le découpant en deux triangles tels qu'un des côtés est parallèle à l'axe des ordonnées :

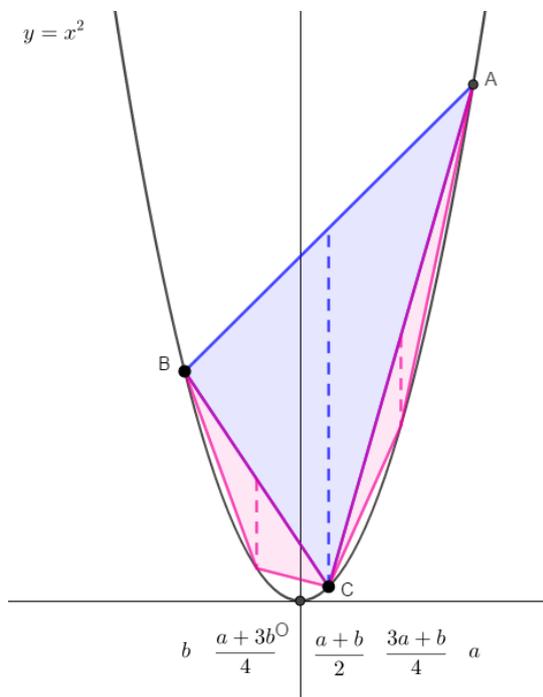


Elle vaut $2 \times \frac{\left(a \times \frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) \times \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^3}{8}$

- À cette étape, $\mathcal{A} \approx a^3 + 2 \frac{a^3}{8} = a^3 \left(1 + \frac{1}{4}\right)$

(*) Le calcul de l'aire d'un des deux triangles rose quelconque sous un segment $[AB]$ de la parabole permet de généraliser l'itération précédente (C a pour abscisse $\frac{a+b}{2}$).

À l'aide des mêmes découpages, mis en pointillés sur la figure, on détermine les aires des triangles :



- L'aire du triangle ABC est

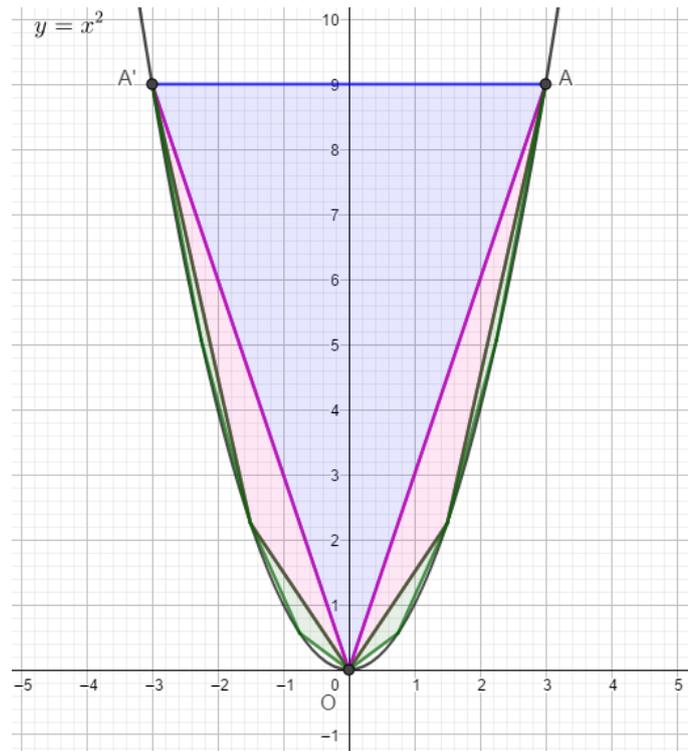
$$2 \times \frac{\left(\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right) \times \left(a - \frac{a+b}{2}\right)}{2} = \frac{(a^2 - 2ab + b^2)}{4} \times \frac{a-b}{2} = \frac{(a-b)^3}{8}$$

- L'aire d'un des deux triangles rose est

$$2 \times \frac{\left(\frac{a^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{2} - \left(\frac{3a+b}{4}\right)^2\right) \times \left(a - \frac{3a+b}{4}\right)}{2} = \left(\frac{5a^2 + 2ab + b^2}{8} - \frac{9a^2 + 6ab + b^2}{16}\right) \times \frac{a-b}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{16} \times \frac{a-b}{4} = \frac{(a-b)^3}{64}$$

Ainsi l'aire d'un triangle rose vaut un huitième de l'aire du triangle bleu.

On peut alors généraliser l'itération pour déterminer l'aire \mathcal{A} :



- On note u_0 l'aire du triangle initiale égale à a^3 , u_n l'aire des 2^n triangles à la n^e itération, on a $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n$.
- Ainsi l'aire \mathcal{A} est approchée par

$$a^3 \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) = a^3 \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} a^3 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right).$$

N'ayant pas la notion de limite, Archimède justifie que l'aire \mathcal{A} est $\frac{4}{3}a^3$ par la méthode d'exhaustion qui consiste à faire un double raisonnement par l'absurde, il démontre que \mathcal{A} ne peut être inférieure à $\frac{4}{3}a^3$ puis que \mathcal{A} ne peut être supérieure à $\frac{4}{3}a^3$.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{3} a^3 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right) = \frac{4}{3} a^3$

b. Méthode des rectangles

Cette méthode très classique permet de déterminer algorithmiquement l'aire sous une courbe, par exemple la parabole.

En admettant que la somme des carrés : $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

Il s'agit ici de déterminer l'aire \mathcal{A}' du plan muni d'un repère orthonormé, délimitée par la parabole d'équation $y = x^2$ et les droites d'équation $x = 0$, $y = 0$ et $x = 1$, (pour cette dernière droite, on peut choisir une équation $x = a$, où a est un réel non nul).

On note n le nombre de rectangles, n est un entier naturel non nul.

On montre que $u_n \leq \mathcal{A}' \leq v_n$ avec

- $u_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \times \left(\frac{i}{n}\right)^2$: représente l'aire des rectangles inférieurs (bleus)

$$u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6n^3} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

- $v_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times \left(\frac{i}{n}\right)^2$: représente l'aire des rectangles supérieurs (rouges)

$$v_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{3}$$

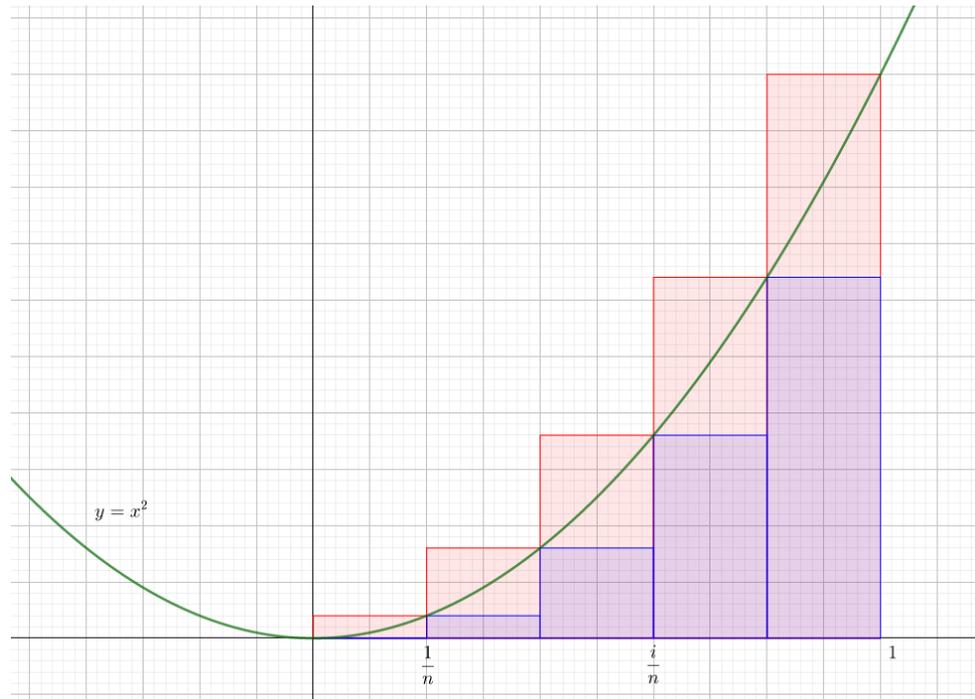
Ainsi on peut dire que $\mathcal{A}' = \frac{1}{3}$ (l'idée est de valider une conjecture qui se démontre par le fait que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes).

Lorsque n est suffisamment grand, les n rectangles ont une largeur infiniment petite.

Ce principe peut suggérer une justification de la notation de Gottfried Wilhelm

Leibniz (allemand 1646-1716), $\mathcal{A}' = \int_0^1 x^2 dx$, dx représentant la largeur infinitésimale d'un rectangle et x^2 la longueur associée, le symbole intégrale représente une somme d'aires de ces rectangles.

Le calcul intégral donnant : $\mathcal{A}' = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.



La notion de limite peut être mise en évidence à partir d'un algorithme de seuil qui permet d'encadrer \mathcal{A}' à la précision souhaitée, on peut aussi formaliser les sommes des aires des rectangles de manière algorithmique.

Remarque : les commandes , SommeSupérieure($x^2,0,a,n$) et SommeInférieure($x^2,0,a,n$) de GeoGebra pour un paramètre n permettent d'illustrer les n rectangles inférieurs et les n rectangles supérieurs dont la somme des aires approche l'aire sous la parabole.

```

01 | # méthode des rectangles
02 |
03 | def f(x):
04 |     return x**2
05 |
06 | def sum_rect_inf(n):
07 |     """
08 |     cette fonction calcule la somme des aires des rectangles inférieurs
09 |     """
10 |     s=0
11 |     for i in range(n):
12 |         s=s+1/n*f(i/n)
13 |     return s
14 |
15 | def sum_rect_sup(n):
16 |     """
17 |     cette fonction calcule la somme des aires des rectangles supérieurs
18 |     """

```

```

19| s=0
20| for i in range(n):
21|     s=s+1/ n*f((1+i)/n)
22| return s
23|
24| def aire_parabole_rectangle(p):
25| '''
26| cette fonction calcule le rang à partir duquel la différence des sommes des
aires des rectangles supérieurs et inférieurs est inférieure à 10^(-p)
27| '''
28| n=1
29| while sum_rect_sup(n)-sum_rect_inf(n)>10**(-p):
30|     n=n+1
31| return [n,sum_rect_inf(n),sum_rect_sup(n)]

```

In[1] : aire_parabole_rectangle(1)

Out[1] : [10, 0.28500000000000003, 0.385]

Remarque, la gestion des nombres flottants sur Python est compliquée, on pourra admettre que 0.28500000000000003 est le nombre 0.285.

c. Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est une méthode algorithmique issue des probabilités visant à déterminer des grandeurs, notamment des calculs d'aires. Son nom fait référence aux jeux de hasard pratiqués au casino de Monte-Carlo. Nicholas Métropolis (1915-1999) était à la tête d'un groupe de chercheurs américains qui ont développé cette méthode.

La méthode peut servir pour l'approximation de l'aire du disque et bien d'autres surfaces notamment celle sous la courbe de la fonction logarithme ou celle sous la courbe de Gauss.

D'autre part, il est possible de comparer la méthode de Monte-Carlo avec la méthode des trapèzes ou des rectangles, notamment en terme de rapidité de convergence.

L'aire sous la courbe de la fonction logarithme

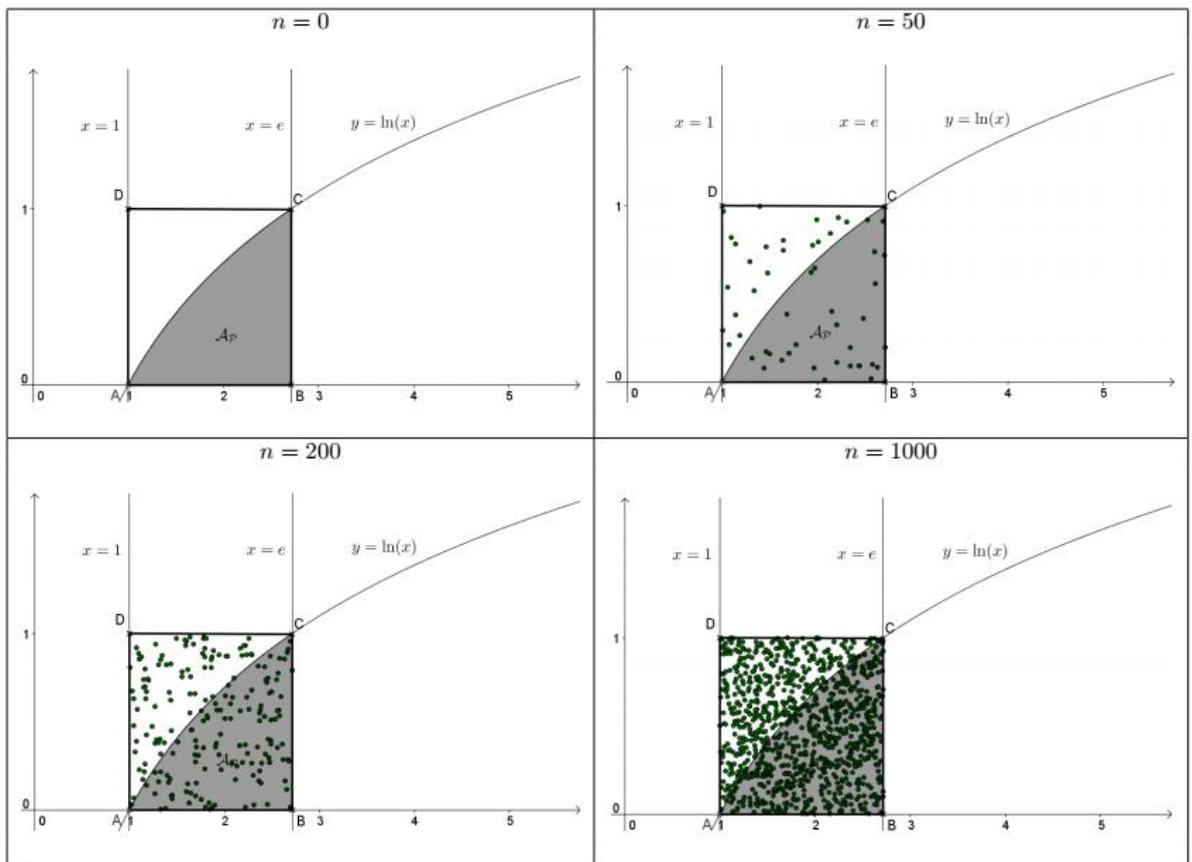
Soit un repère orthogonal $(O ; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

Le but est de déterminer l'aire $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ de la partie \mathcal{P} du plan délimitée par les droites d'équation $y = 0$, $x = 1$, $x = e$ et la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

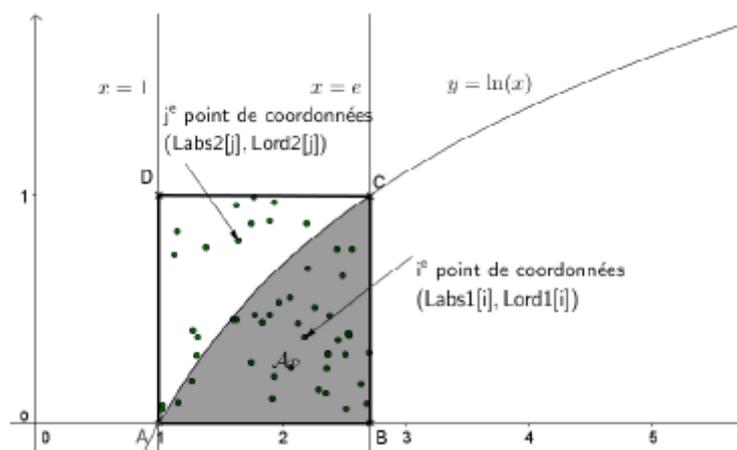
On place n points au hasard dans le rectangle $ABCD$ de côté 1 et $e - 1$, d'aire $e - 1$ (unité d'aire, u.a).

La proportion de points dans la partie \mathcal{P} , $\frac{c}{n}$ où c est le nombre de points dans la partie \mathcal{P} , est proche de $\frac{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}}{e-1}$ pour n assez grand.

Ainsi $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} \approx \frac{c(e-1)}{n}$.



Pour distinguer les n points de ceux qui sont dans la partie \mathcal{A}_p de ceux qui ne le sont pas, on peut construire deux premières listes $Labs1, Lord1$ pour les abscisses et ordonnées des points qui sont dans la partie \mathcal{A}_p , ainsi le i^e point des n points qui est dans la partie \mathcal{A}_p a pour coordonnées $(Labs1[i], Lord1[i])$; les coordonnées des autres points sont repérées par deux autres listes $Labs2$ et $Lord2$.



Sur Python, un programme permet de faire l'approximation :

01 | #méthode de Monte_Carlo

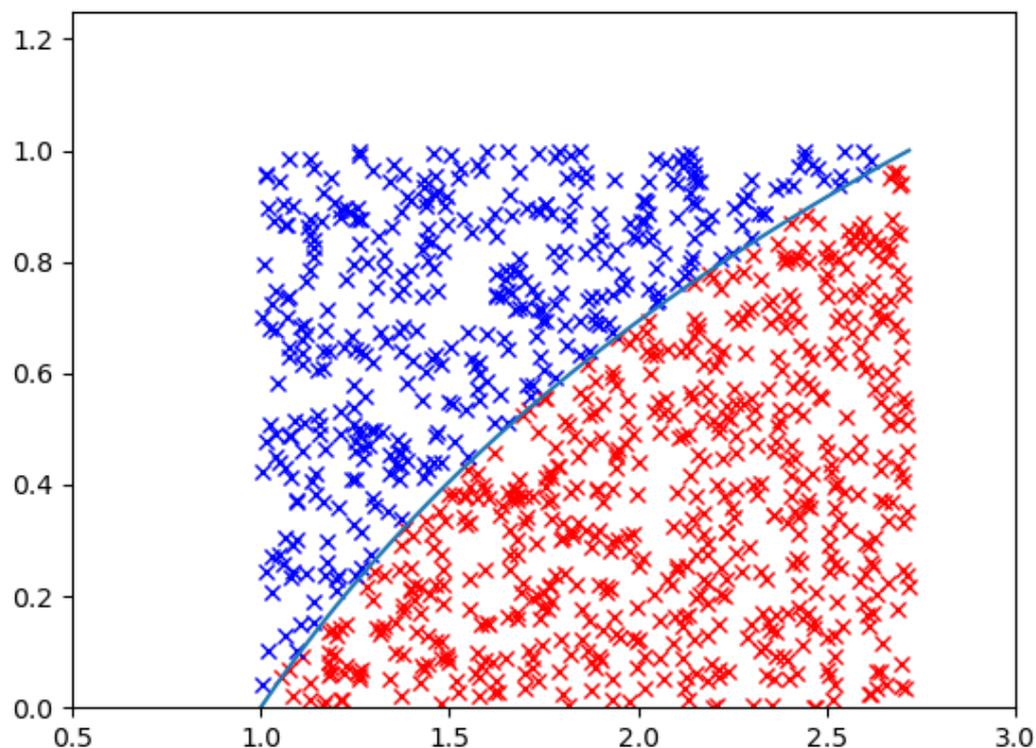
```

02|
03| from math import *
04| from random import *
05| import matplotlib.pyplot as plt
06| import numpy as np
07|
08|
09| def montecarlo(n):
10|     Labs1=[]
11|     Lord1=[]
12|     Labs2=[]
13|     Lord2=[]
14|     c=0
15|     for i in range(0,n):
16|         a=random()*(exp(1)-1)+1
17|         b=random()
18|         if b<log(a):
19|             Labs1.append(a)
20|             Lord1.append(b)
21|         c=c+1
22|         else :
23|             Labs2.append(a)
24|             Lord2.append(b)
25|
26|     #représentation graphique :
27|     #en rouge et représenté par une croix x
28|     plt.plot(Labs1, Lord1, 'rx')
29|     #en bleu et représenté par une croix x
30|     plt.plot(Labs2, Lord2, 'bx')
31|     #construction de la courbe de la fonction log
32|     x=np.linspace(1,exp(1),100)
33|     plt.plot(x,np.log(x))
34|     #Construction des axes abscisses et ordonnées
35|     plt.axis([0, 3, 0, 2])
36|     plt.show()
37|     return c*(exp(1)-1)/n

```

In[1] : montecarlo(1000)

Out[1] : 1.0017583059916233



La fonction F définie et dérivable sur $[1; e]$ par $f(x) = x \ln(x) - x$ permet de trouver l'aire $\mathcal{A}_P = 1$

L'aire sous la courbe de Gauss

Soit un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

La fonction f définie, continue et positive sur \mathbb{R} telle que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

f est un exemple de fonction paire dont on cherche l'aire sous la « cloche » par approximation avec la méthode de Monte-Carlo.

La symétrie de la courbe permet une étude de l'aire sur l'intervalle $[0; +\infty[$; ainsi l'aire \mathcal{A}_P de la partie \mathcal{P} du plan est délimitée par les droites d'équation $y = 0$ et $x = 0$ et la courbe d'équation $y = f(x)$.

Après avoir étudié le maximum de $f(x)$ et la limite de la fonction f en $+\infty$, on peut sensibiliser les élèves à la faible proportion de points qui sont dans la partie \mathcal{P} pour x assez grand et rendre négligeable cette partie.

Ainsi le rectangle $ABCD$ dans lequel on choisit de prendre les points peut être défini par les points de coordonnées $(0; 0)$; $(4; 0)$; $(4; 0.5)$; $(0; 0.5)$.

On place n points au hasard dans le rectangle $ABCD$ d'aire 2 (u.a) et pour n assez grand, $\frac{1}{2} \mathcal{A}_P \approx \frac{2c}{n}$ où c est le nombre de points de la partie \mathcal{P} du rectangle $ABCD$.

Sur Python, un programme permet de faire l'approximation :

```

01| #méthode de Monte_Carlo
02|
03| from math import*
04| from random import*
05| import matplotlib.pyplot as plt
06| import numpy as np
07|
08|
09| def f(x):
10|     return exp(-x**2/2)/sqrt(2*pi)
11|
12| def montecarlo(n):
13|     Labs1=[]
14|     Lord1=[]
15|     Labs2=[]
16|     Lord2=[]
17|     c=0
18|     for i in range(0,n):
19|         a=random()*4
20|         b=random()*0.5
21|         if b<f(a):
22|             Labs1.append(a)
23|             Lord1.append(b)
24|             c=c+1
25|         else :
26|             Labs2.append(a)
27|             Lord2.append(b)
28|
29| #représentaiton graphique :
30| #en rouge et représenté par une croix x
31| plt.plot(Labs1, Lord1, 'rx')
32| #en bleu et représenté par une croix x
33| plt.plot(Labs2, Lord2, 'bx')
34| #construction de la courbe de la fonction f
35| x=np.linspace(0,4,100)
36| y=np.exp(-x**2/2)/sqrt(2*pi)
37| plt.plot(x,y)
38| #Construction des axes abscisses et ordonnées
39| plt.axis([0, 4.5, 0, 0.6])
40| plt.show()

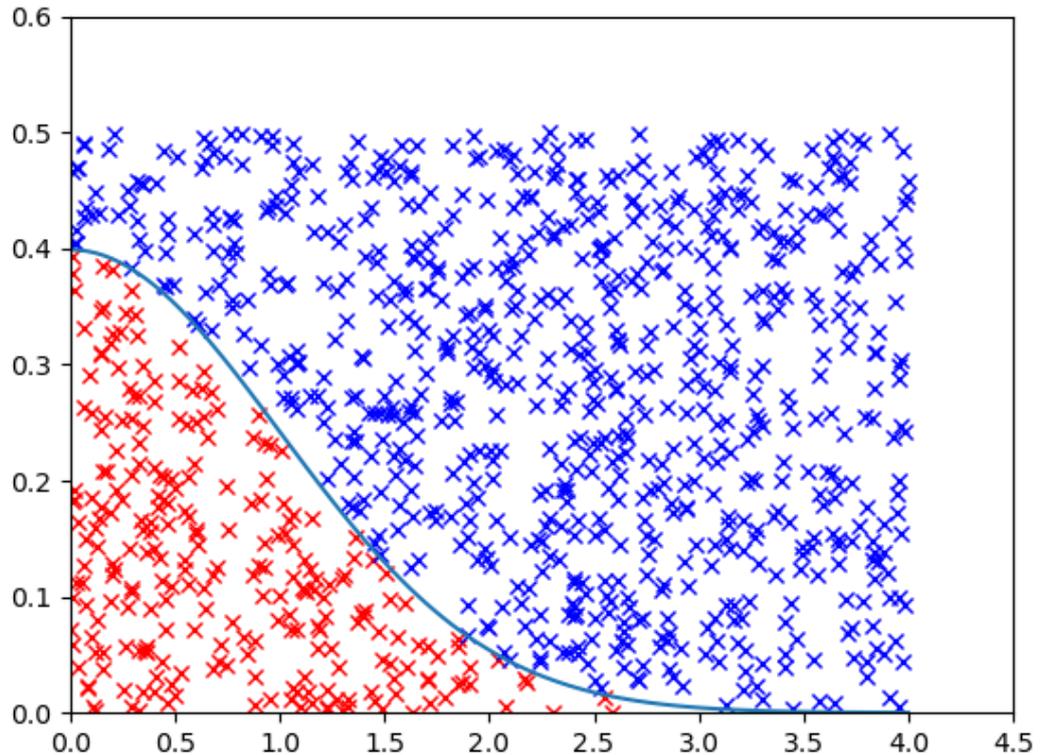
```

41| return c*2/n

In[1]: montecarlo(1000)

Out[1]: 0.496

La valeur exacte étant $\frac{1}{2} \mathcal{A}_{\mathcal{P}} = 0,5$.



L'aire du disque

Soit un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

La fonction f définie, continue et positive sur $[-1; 1]$ telle que $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

f est exemple de fonction paire dont on cherche l'aire sous le demi-cercle par approximation avec la méthode de Monte-Carlo.

La symétrie de la courbe permet une étude de l'aire sur l'intervalle $[0; 1]$ et on note l'aire $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ de la partie \mathcal{P} du plan est délimitée par les droites d'équation $y = 0$ et $x = 0, x = 1$ et la courbe d'équation $y = f(x)$.

Le rectangle $ABCD$ dans lequel on choisit de prendre les points peut être défini par les points de coordonnées $(0; 0); (1; 0); (1; 1); (0; 1)$.

On place n points au hasard dans le rectangle $ABCD$ d'aire 1 (u.a) et pour n assez grand, $A_p \approx \frac{c}{n}$ où c est le nombre de points de la partie \mathcal{P} .

Sur Python, un programme permet de faire l'approximation :

```

01| #méthode de Monte_Carlo
02|
03| from math import*
04| from random import*
05| import matplotlib.pyplot as plt
06| import numpy as np
07|
08|
09| def f(x):
10|     return sqrt(1-x**2)
11|
12| def montecarlo(n):
13|     Labs1=[]
14|     Lord1=[]
15|     Labs2=[]
16|     Lord2=[]
17|     c=0
18|     for i in range(0,n):
19|         a=random()
20|         b=random()
21|         if b<f(a):
22|             Labs1.append(a)
23|             Lord1.append(b)
24|             c=c+1
25|         else :
26|             Labs2.append(a)
27|             Lord2.append(b)
28|
29| #représentaiton graphique :
30| #en rouge et représenté par une croix x
31| plt.plot(Labs1, Lord1, 'rx')
32| #en bleu et représenté par une croix x
33| plt.plot(Labs2, Lord2, 'bx')
34| #construction de la courbe de la fonction f
35| x=np.linspace(0,1,100)
36| y=np.sqrt(1-x**2)
37| plt.plot(x,y)
38| #Construction des axes abscisses et ordonnées
39| plt.axis('equal')
40| plt.show()

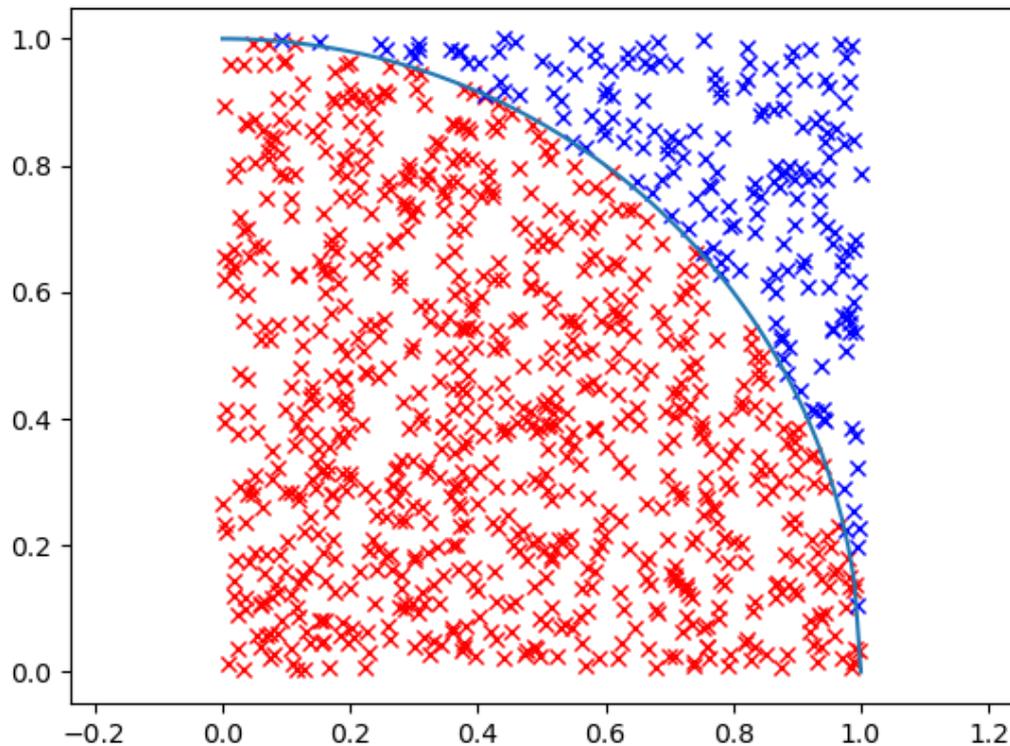
```

41 | return c/n

In[1] : montecarlo(1000)

Out[1] : 0.788

La valeur exacte étant $\mathcal{A}_p = \frac{\pi}{4}$.



L'aire sous la parabole

Soit un repère orthonormé $(O ; \vec{i}; \vec{j})$.

La fonction f définie, continue et positive sur $[-1 ; 1]$ telle que $f(x) = x^2$.

f est exemple de fonction paire dont on cherche l'aire sous la parabole par approximation avec la méthode de Monte-Carlo.

La symétrie de la courbe permet une étude de l'aire sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et on note

l'aire \mathcal{A}_p de la partie \mathcal{P} du plan est délimitée par les droites d'équation

$y = 0$ et $x = 0, x = 1$ et la courbe d'équation $y = f(x)$.

Le rectangle $ABCD$ dans lequel on choisit de prendre les points peut être défini par les points de coordonnées $(0 ; 0) ; (1 ; 0) ; (1 ; 1) ; (0 ; 1)$.

On place n points au hasard dans le rectangle $ABCD$ d'aire 1 (u.a) et pour n assez grand, $A_p \approx \frac{c}{n}$ où c est le nombre de points de la partie \mathcal{P} .

Sur Python, un programme permet de faire l'approximation :

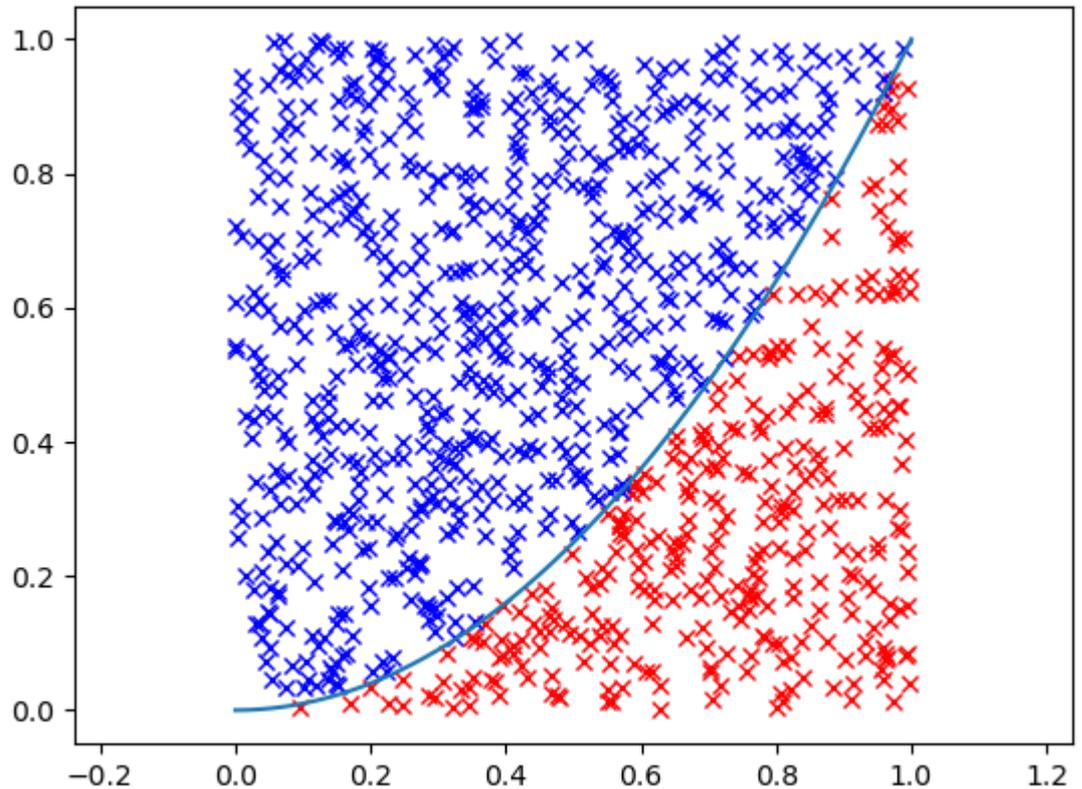
```
01| #méthode de Monte_Carlo
02|
03| from math import*
04| from random import*
05| import matplotlib.pyplot as plt
06| import numpy as np
07|
08|
09| def f(x):
10|     return x**2
11|
12| def montecarlo(n):
13|     Labs1=[]
14|     Lord1=[]
15|     Labs2=[]
16|     Lord2=[]
17|     c=0
18|     for i in range(0,n):
19|         a=random()
20|         b=random()
21|         if b<f(a):
22|             Labs1.append(a)
23|             Lord1.append(b)
24|             c=c+1
25|         else :
26|             Labs2.append(a)
27|             Lord2.append(b)
28|
29|     #représentaiton graphique :
30|     #en rouge et représenté par une croix x
31|     plt.plot(Labs1, Lord1, 'rx')
32|     #en bleu et représenté par une croix x
33|     plt.plot(Labs2, Lord2, 'bx')
34|     #construction de la courbe de la fonction f
35|     x=np.linspace(0,1,100)
36|     y=np.power(x,2)
37|     plt.plot(x,y)
38|     #Construction des axes abscisses et ordonnées
```

```
39| plt.axis('equal')
40| plt.show()
41| return c/n
```

```
In[1]: montecarlo(1000)
```

```
Out[1]: 0.325
```

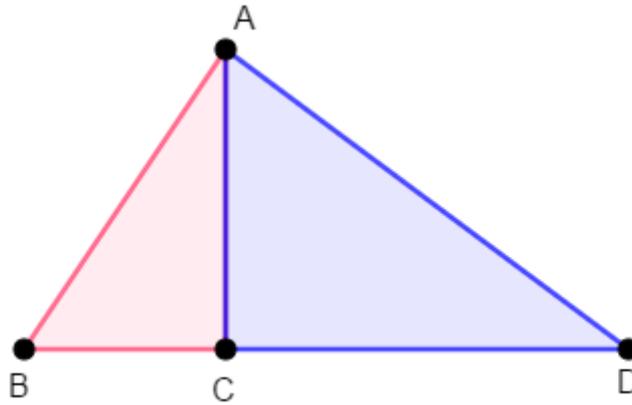
La valeur exacte étant $\mathcal{A}_p = \frac{1}{3}$.



3. Volumes usuels

Quelques éléments d'histoire :

Euclide (grec 300 ans av. J.-C.) avait établi une proportion entre ligne et surface. Dans le livre VI, la proposition I dit que : « Les triangles et les parallélogrammes qui sont sous la même hauteur sont l'un relativement à l'autre comme leurs bases. Que [...] les triangles ABC, ACD soient sous la même hauteur AC. Je dis que comme la base BC est relativement à la base CD, ainsi [est] le triangle ABC relativement au triangle ACD.»



Archimède de Syracuse (287 av. J.-C. - 212 av. J.-C.) utilise sa méthode d'exhaustion (double raisonnement par l'absurde) et des pesées pour établir des relations de proportions entre ligne et surface.

Dans *Exercitationes geometriæ sex*, 1647, traduction de Maximilien Marie dans son *Histoire des sciences mathématiques*, 1884, Bonaventura Francesco Cavalieri (italien 1598-1647) expose sa méthode de la théorie des indivisibles :

[. . .] la considération des indivisibles fournissait le principal instrument pour arriver à la comparaison des grandeurs des figures tant planes que solides. J'ai institué deux voies pour y parvenir. [. . .] Dans l'une et l'autre méthode apparaissent, lorsqu'il s'agit de la mesure des figures planes, des lignes parallèles en nombre indéfini, comprises entre celles qui touchent la figure ; lorsqu'il s'agit de la mesure de solides, ces lignes sont remplacées par des plans parallèles équidistants, compris de même entre ceux qui touchent la figure à ses deux extrémités. Il est donc manifeste que nous considérons les figures planes comme formées de fils parallèles, à l'instar des toiles, et les solides comme composés de feuilles, de même que les livres. Mais tandis que, dans les toiles, les fils, et, dans les livres, les feuilles sont en nombre fini, parce qu'il s'y trouve une certaine épaisseur, pour nous le nombre en est indéfini, parce que nous les considérons comme sans épaisseur. Cependant nous ne faisons pas usage de cette hypothèse sans y apporter quelque attention, car, dans la première méthode, nous considérons la somme totale et, dans la seconde, leur distribution.

Si deux figures planes, comprises entre les mêmes parallèles, interceptent des segments égaux chacun à chacun, sur les droites parallèles aux bases, les figures seront égales ; plus généralement, si les deux segments interceptés sur une même droite, dans les deux figures, ont une raison (rapport) constante, cette raison sera celle de la figure ; et de même pour les solides

En comparant des lignes et des surfaces, Archimède et Cavalieri vont montrer à leur manière les volumes usuels du cône, du cylindre, de la sphère.

Cavalieri pense que sa méthode est suffisamment rigoureuse et n'a besoin d'aucune autre démonstration. On peut considérer que le principe des indivisibles proposé par Cavalieri est l'ancêtre du calcul intégral.

Gottfried Wilhelm Leibniz (allemand 1646-1716) et Isaac Newton (anglais 1643-1727) utiliseront des sections, linéaires ou planes qui ont une épaisseur infiniment petite. Dans ce cas, on pourra, sous certaines conditions, en faire la somme ; ce qui donnera le calcul différentiel et intégral.

Développement :

L'idée de cette partie est de retravailler les volumes usuels en donnant du sens au calcul intégral et comprendre la notion de somme sous-jacente. Des manipulations sur GeoGebra ou avec des solides permettent de conjecturer et de prévoir le calcul intégral, mais aussi de rendre peut-être plus « intuitives » des formules très mal connues des élèves.



D'autre part, les volumes usuels étaient connus bien avant le calcul intégral, les découvrir par l'histoire de ces volumes peut susciter la curiosité.

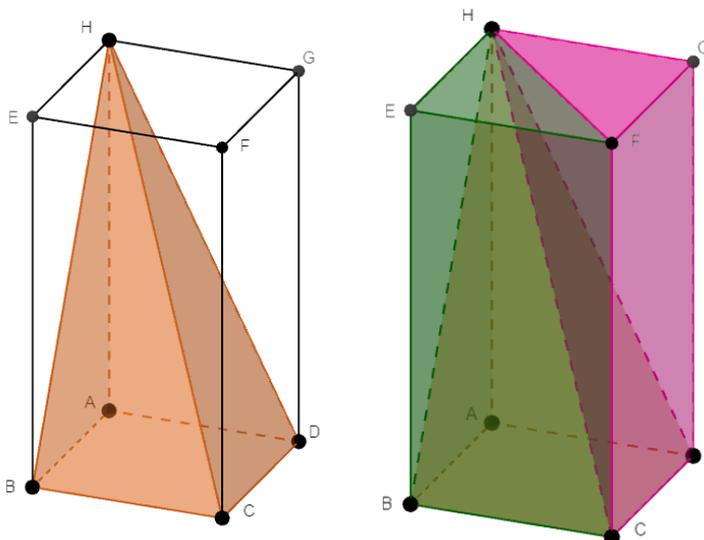
Les travaux dans la classe peuvent être l'occasion de travail de groupe, d'expérimentation, de mise en commun et de restitution, par exemple chaque groupe serait missionné de travailler et de présenter le volume d'un solide usuel.

On peut étendre ce travail à la recherche des surfaces de ces solides.

a. Volume d'une pyramide

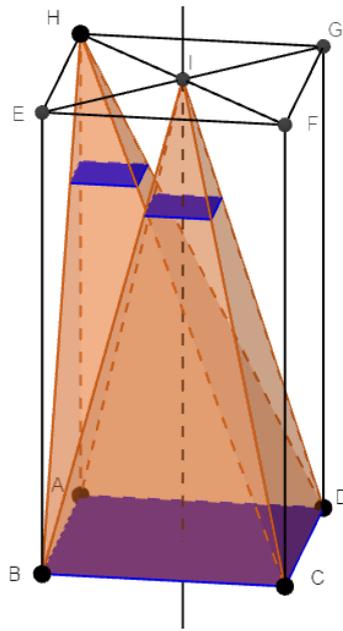
Par manipulation on peut mettre en évidence le volume d'une pyramide de base carré par les étapes suivantes :

On considère la pyramide $ABCDH$ contenue dans le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ d'arêtes $a = AB$ et de hauteur $h = AH$ comme suit.



Le volume de cette pyramide $ABCDH$ vaut le tiers du volume du parallélépipède rectangle, ainsi $V_{ABCDH} = \frac{ha^2}{3}$.

En considérant la pyramide $ABCDH$ et toutes les sections des plans parallèles au plan (ABC) avec chacune des pyramides, le théorème de Thalès permet de justifier que chacun des carrés des sections sont d'aires égales, il s'agit du principe de Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647)

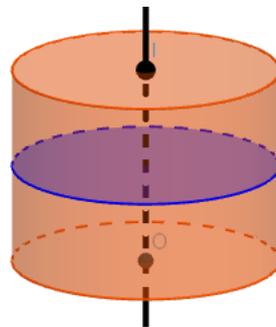


Ainsi $V_{ABCDH} = V_{ABCDI}$.

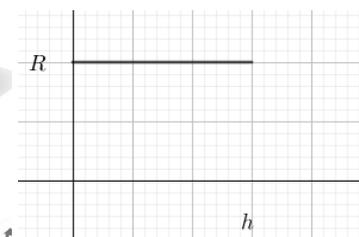
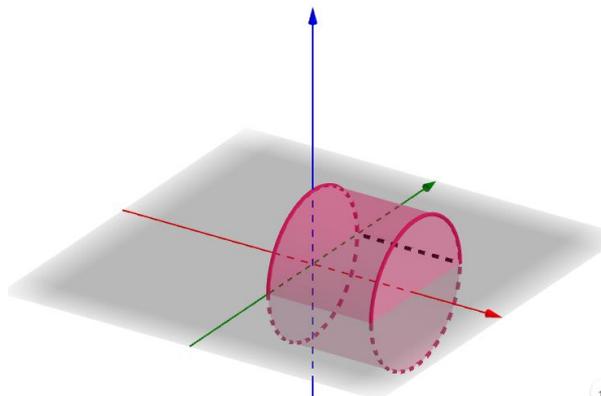
Avec le théorème de Thalès, ou une homothétie, on montre que le rapport des surfaces des petits carrés bleus à la base du cône est $\frac{z^2}{h^2}$ où z est la hauteur de la section en partant du sommet, ainsi :

$$V_{pyramide} = \int_0^h a^2 \frac{z^2}{h^2} dz = \frac{a^2}{h^2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{a^2 h}{3}$$

b. Volume du cylindre



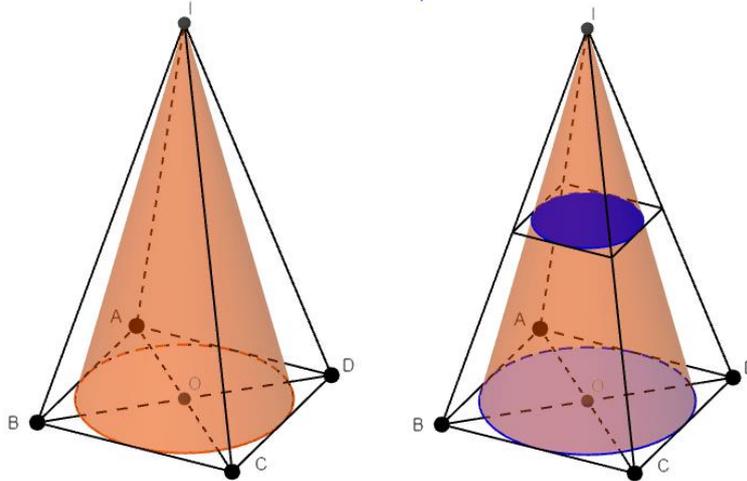
$$V_{cylindre} = \pi R^2 h$$



$$V_{cylindre} = \int_0^h \pi R^2 dx = \pi R^2 [x]_0^h = \pi R^2 h$$

c. Volume d'un cône

On peut inscrire le cône de base circulaire dans la pyramide précédente :



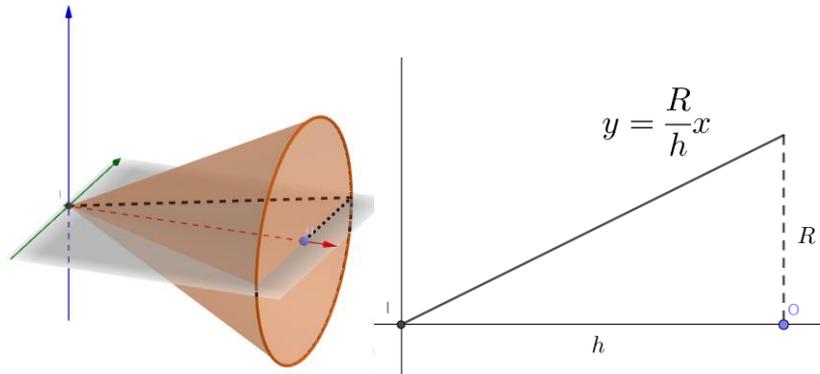
Pour chaque section parallèle au plan (ABC) du cône et de la pyramide le théorème de Thalès donne le même rapport de l'aire du disque et l'aire du carré égale à $\frac{\pi}{4}$.

Ainsi le volume du cône $V_{cône}$ de hauteur $h = OI$ et de rayon R est

$$\frac{V_{cône}}{V_{ABCDI}} = \frac{\pi}{4} \text{ soit } V_{cône} = \frac{\pi}{4} V_{ABCDI} = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{3} AB^2 \times h = \frac{1}{3} \pi R^2 \times h.$$

Par le principe de Cavalieri, on généralise le volume du cône.

Le volume du cône précédent se détermine par le calcul intégral dans un repère orthonormé :



$$V_{cône} = \int_0^h \pi \left(\frac{R}{h}x\right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{h^2} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

d. Volume d'une boule

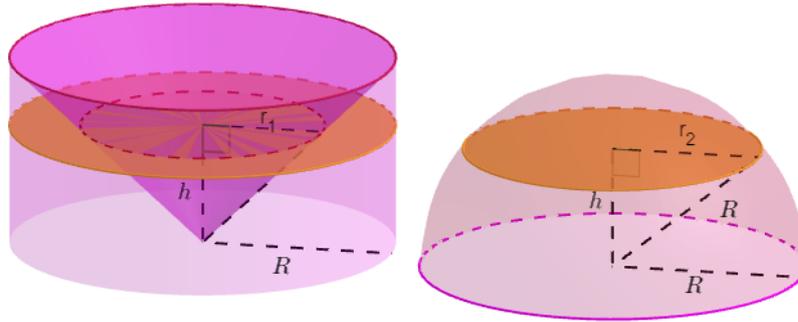
On considère une boule de rayon R et un cylindre de rayon R et de hauteur R , dans le cylindre on inscrit le cône de rayon R et de hauteur R comme suit.

Pour toutes sections parallèles à la base on démontre que l'aire de la couronne orange dans le cylindre est la même que l'aire d'un disque orange dans la sphère.

- Dans le cylindre, $\frac{r_1}{R} = \frac{h}{R} \Leftrightarrow r_1 = h$, l'aire de la couronne orange est $\pi(R^2 - r_1^2) = \pi(R^2 - h^2)$
- Dans la demi-boule : $r_2^2 = R^2 - h^2$, l'aire du disque est $\pi(R^2 - h^2)$

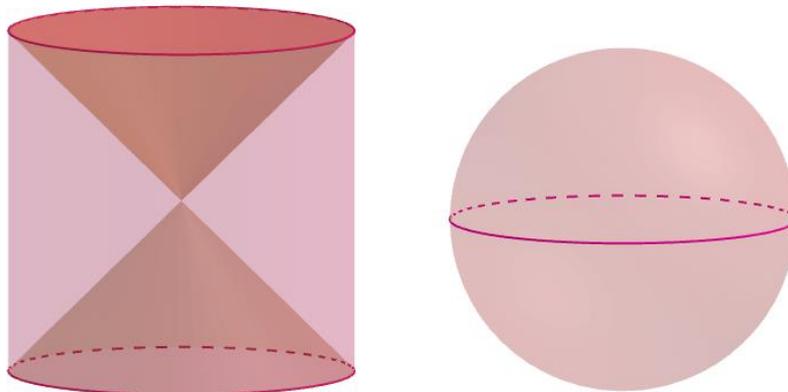
Ainsi $V_{\frac{1}{2}boule} = V_{cylindre} - V_{c\^one} = \pi R^2 \times R - \frac{1}{3}\pi R^2 \times R = \frac{2}{3}\pi R^3$

D'où $V_{boule} = \frac{4}{3}\pi R^3$.



Vers 220 av. J.-C Archimède a écrit de la sphère et du cylindre. Dans cet ouvrage il donne le surface d'un cylindre, le volume d'un cylindre, la surface de la sphère et le volume de la boule.

Le volume de la boule est la différence du volume du cylindre avec le sablier.



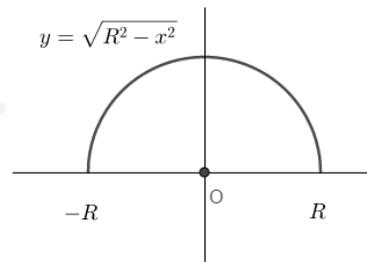
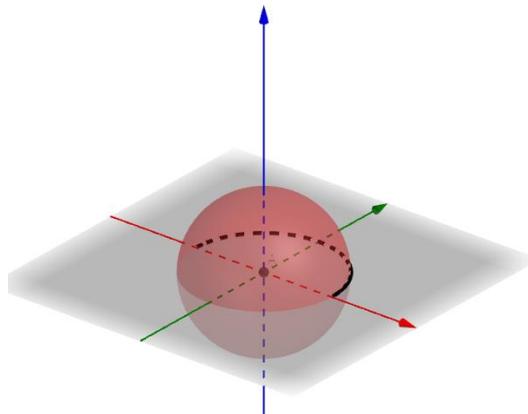
Cicéron (106 av.J.-C – 46 av.J.-C) retrouve la tombe d'Archimède marquée d'une sphère inscrite dans un cylindre ; Plutarque (46–125) penseur et écrivain romain a écrit *La vie des hommes illustres*. Il y indique que l'inscription sur la tombe était une volonté d'Archimède.

Au revers de la médaille Fields on retrouve en arrière plan la boule inscrite dans un cylindre.



PHOTO FOURNIE PAR STEFAN ZACHOW, DE L'UNION MATHÉMATIQUE INTERNATIONALE SITE [HTTPS://WWW.LAPRESSE.CA/SCIENCES/201408/12/01-4791261-LA-MEDAILLE-FIELDS-DECERNEE-POUR-LA-PREMIERE-FOIS-A-UNE-FEMME.PHP](https://www.lapresse.ca/sciences/201408/12/01-4791261-LA-MEDAILLE-FIELDS-DECERNEE-POUR-LA-PREMIERE-FOIS-A-UNE-FEMME.PHP)

Le volume du cône précédant se détermine par le cacul intégrale dans un repère orthonormé :



$$V_{boule} = 2 \int_0^R \pi (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = 2\pi \left[R^2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^R = 2\pi \left(R^3 - \frac{1}{3}R^3 \right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Archimède. Tome premier. *De la sphère et du cylindre. La mesure du cercle. Sur les conoïdes et les sphéroïdes*. Texte établi et traduit par Charles Mugler, 1971

https://www.persee.fr/doc/reg_0035-2039_1971_num_84_399_1166_t1_0219_0000_2

Archimède, tome II. *Des Spirales. De l'Équilibre des Figures Planes. L'Arénaire. La Quadrature de la Parabole*. Texte établi et traduit par Charles Mugler, 1971 ;

Archimède, tome III. *Des Corps Flottants. Stomachion. La Méthode. Le livre des Lemmes. Le Problème des Bœufs*. Texte établi et traduit par Charles Mugler, 1971

https://www.persee.fr/doc/rea_0035-2004_1973_num_75_3_3946_t1_0375_0000_2

Quadrature de la parabole méthode d'Archimède, page du site Internet de Villemin Gérard, 6 mars 2020 .

<http://villemin.gerard.free.fr/GeomLAV/Parabole.htm>

Comparaison de trois volumes, page du site Internet de Villemin Gérard, 11 novembre 2018.

<http://villemin.gerard.free.fr/GeomLAV/Objet3D/CoArchim.htm>

Méthode des indivisibles, Marcel Franz, bulletin vert APMEP numéro 497, pages 93 à 105.

<https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA12015.pdf>

Archimède et la méthode d'exhaustion, Méthode d'Archimède, André Ross

<http://www.cll.qc.ca/Professeurs/Mathematiques/Rossa/DOSSIERS/Archimede-Art.pdf>

La méthode de Monte-Carlo, Tangente Hors-série. Numéro 72. Pages 40-41 par Daniel Justens, édition Pôle Paris, 2019.