Ressources pour le lycée

Histoire de la fonction logarithme

1. Introduction

L'Histoire des Mathématiques est un levier de formation dans les nouveaux programmes de lycée. L'Histoire des Mathématiques est un vaste sujet qui pose question sur la mise en place dans le programme optionnel de Mathématiques Complémentaires au lycée. En effet à travers l'Histoire de Mathématiques la mise en place des concepts, de leur intuition à la formalisation, peut enrichir la didactique et la pédagogie de notre enseignement. Riche de réflexions, les échanges et les points de vue entre mathématiciennes et mathématiciens à travers les âges ont fait évoluer la discipline, cette évolution perdure et nous avons l'opportunité de sensibiliser nos élèves à ces avancées qui définissent les Mathématiques contemporaines. De plus l'approche historique des notions mathématiques donne aux élèves un bagage culturel nécessaire à leur formation, notamment pour l'épreuve du grand oral.
Le document d'accompagnement propose des pistes chronologiques sur l'Histoire des nombres logarithmiques et des fonctions logarithmes.

L'Histoire des fonctions logarithmes est un exemple qui met en avant la difficulté de la création d'un concept pressenti depuis des siècles, de la notion de logarithme naîtra la notion de fonction et de courbe d'une fonction telles qu'on les connait aujourd'hui, J.Bernoulli donnera, le premier, une définition d'une fonction dans ces échanges avec G.W.Leibniz.

Un point central sur l'Histoire de la fonction logarithme est l'ensemble des travaux de J.Neper et de H.Briggs. Les quadratures des courbes ont largement occupé les mathématiciennes et mathématiciens, la parabole, les courbes fonctions puissances, la cycloïde, le cercle et avec les logarithmes, l'hyperbole sont leurs sommets à atteindre. G.Saint-Vincent s'y est risqué, très critiqué notamment par M.Mersenne puis reconnu par G.W.Leibniz il tente la quadrature du cercle et de l'hyperbole (c'est apparemment ce qui lui vaut beaucoup de critiques, car sa méthode ne correspond pas à la méthode de double raisonnement par l'absurde). Ses travaux sur la quadrature de l'hyperbole éclairent sur les propriétés algébriques des logarithmes.

L'ensemble des points présentés dans ce document présentent des activités possibles pour la classe, en Mathématiques Complémentaires les élèves doivent clairement comprendre des concepts, sans faire de démonstration.

D'autre part, le document fourni des algorithmes, notamment ceux inspirés des travaux de H.Briggs, le premier permet de calculer $2^{10^{14}}$ par quatraine, le second permet de déterminer une valeur approchée de $\log_{10} 2$ (mais plus généralement, on peut choisir la base que l'on souhaite). Enfin l'algorithme de W.Brouncker permet de déterminer le logarithme népérien d'un nombre par une dichotomie, l'illustration de cet algorithme est très intéressante.

2. Approche historique de la fonction logarithme : avant J.Neper

a. Un problème de remboursement financier des Babyloniens

À l'époque des babyloniens (II^{e} millénaire av. J.-C au VI^{e} siècle av. J.-C.), on trouve des traces d'un commerce riche et abondant notamment entre les villes d'Assur et Kanesh. Quelques exemples de tablettes des archives des marchands assyriens exhumées à Kültepe (images du site Wikipédia) :

Lettre d'un marchand à un responsable de convoi.

Compte des recettes et dépenses d'un convoi.

Reçu pour un prêt en argent.

Compte-rendu de procès.

Image wikipédia

L'argent est un métal qui est très présent dans les mines de la Mésopotamie, il s'impose comme métal de référence pour les transactions, mais il est surtout utilisé pour les gros règlements. Pour toutes les autres transactions, l'orge était très utilisé, il concurrençait l'argent. Les revenus étaient faibles et les dépenses en nourriture, les charges pour l'achat des semences, les locations des travailleurs et des animaux étaient lourdes. Il s'est donc très vite mis en place un système financier, notamment d'emprunt.

À cette époque on s'intéressait déjà à la question de connaitre le temps nécessaire pour doubler un capital C_0 à un taux d'intérêt de 20%.

En base 60, ils remarquent que $(1\,;12)^3 < 2$ soit $\left(1+\frac{12}{60}\right)^3 < 2$ et $(1\,;12)^4 > 2$ soit $\left(1+\frac{12}{60}\right)^4 > 2$.

Il semble que les babyloniens aient trouvé une réponse par interpolation linéaire, en trouvant une solution au problème :

$$\frac{\left(1+\frac{12}{60}\right)^4-\left(1+\frac{12}{60}\right)^3}{4-3}=\frac{2-\left(1+\frac{12}{60}\right)^3}{x-3}$$

$x=(3;47,13,20)$ soit le nombre $3+\frac{47}{60}+\frac{13}{60^2}+\frac{20}{60^3}$ soir environ 3,787037037

En classe il est possible de présenter ce problème et de vérifier que le résultat trouvé par les babyloniens est très acceptable pour l'époque.

Il est alors important de faire observer qu'aucune fonction logarithme n'est utilisée, mais la résolution du problème relève bien de l'utilisation d'une fonction logarithme.

Ce problème classique est aussi l'occasion de travailler la notion de suite vue en classe de première générale, il permet aussi de mettre en place la nécessité de rendre continue l'évolution.

b. Un problème d'Archimède

Dans l'*Arénaire* (vers 230 av. J.-C.), Archimède mathématicien, géomètre, physicien, (Syracuse, 287-212 av. J.-C.), propose un système de numération pour traiter sans difficulté les grands nombres. Ainsi il pose le problème suivant :

« Combien de grains de sable sont contenus dans une sphère de grandeur notre univers ? »

Pour répondre à cette question, il manipule des grands nombres et il met en évidence la relation exponentielle fondamentale :

Pour tous entiers naturels n et m, et un nombre réel a, $a^{n+m} = a^n a^m$.

« Lorsque des nombres sont en proportion continue à partir de l'unité, et que certains de ces nombres sont multipliés entre eux, le produit sera dans la même progression, éloigné du plus grand des nombres multipliés d'autant de nombres que le plus petit des nombres multipliés l'est de l'unité dans la progression, et éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les nombres multipliés sont éloignés de l'unité. »

« *Dans la suite des nombres proportionnels 1, a^1 , a^2, a^3, … a^{n-1}, a^n, … a^m, a^{m+1}, … a^{m+n}, … où le rang de chaque nombre est égal à son exposant augmenté de 1, la distance du produit $a^n \times a^m = a^{m+n}$ à a^m est mesurée par $(n+1)$ nombres et sa distance à l'unité par $(m+n+1)$ nombres*. »

c. Nicolas Chuquet

Dans *Triparty en la science des nombres (1484)*, Nicolas Chuquet mathématicien (français né entre 1455 et 1455 -1488) introduit des exposants fractionnaires et négatifs, retrouve la propriété d'Archimède :

« *Dans une progression géométrique, le produit du nombre de rang n par le nombre de rang m donne le nombre de rang $n+m$*».

« *En cette considération est manifestement quelque secret qui appartient aux nombres* »

Il illustre le problème d'un tonneau qui se vide de $\frac{1}{10}$ de sa capacité chaque jour. Au bout de combien de jour sera-t-il à moitié vide ? Chuquet estime que l'interpolation linéaire entre le 6e et le 7e jour admise par les mathématiciens de l'époque est manifestement fausse mais il ne propose pas de solution.

d. Luca Pacioli

Dans *summa de arithmética, geometria, de proportioni et de proportionalita* (1494), Luca Pacioli mathématicien (italien 1447-1517) résume les mathématiques de son époque, notamment en algèbre et il présente la méthode vénitienne des tenues des comptes, notamment la règle des 72.

A voler sapere ogni quantitμa a tanto per 100 l'anno, in quanti anni sara tornata doppia tra utile e capitale ,tieni per regola 72 ,a mente, il quale sempre partirai per l'interesse ,e quello che ne viene ,in tanti anni sara raddoppiato.

Esem pio: Quando l'interesse e a 6 per 100 l'anno, dico che si parta 72 per 6 ; ne vien 12 ,e in 12 anni sara raddoppiato il capitale .

Vouloir connaître chaque quantité à tant de pour cent par an, en combien d'années, entre le profit et le capital, restez fidèle à la règle des 72, gardez toujours à l'esprit que vous laisserez toujours un intérêt et ce qui en découlera dans de nombreuses années sera doublé.
Exemple: lorsque l'intérêt est de 6 pour 100 par an, je dis qu'il est de 72 pour 6; il vient 12, et dans 12 ans le capital sera doublé.

Si un capital est placé au taux d'intérêt de $r\%$ par période, il faut $\frac{72}{r}$ périodes pour le doubler

$C(1+r)^n = 2C$ donne $(1+r)^n = 2$ d'où $n = \frac{\ln 2}{\ln(1+r)} \approx \frac{\ln 2}{r}$ pour r proche de 0.
Or $\ln 2 \approx 69\%$, la règle est très approximative mais 72 permet d'avoir plus de diviseurs (2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36) pour approximer le nombre de périodes

e. Michael Stifel

Dans *Arithmetica Integra* (1544) Michael Stifel, mathématicien (allemand 1486 ou 1487 – 1567) poursuit les idées de Chuquet sur les exposants et propose en regard une progression arithmétique et géométrique :

…	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	…
…	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	…

Il fait correspondre $3+5$ à 8×32 mais aussi $-3+(-5)$ à $\frac{1}{8} \times \frac{1}{32}$
On pense que Neper avait connaissance de ses travaux et qu'il s'en serait inspiré.

f. Prosthaphérèse

Pour simplifier les calculs trigonométriques au XVII siècle, notamment ceux issus de l'astronomie et la gestion de grands nombres les mathématiciens avaient recours à la formule de linéarisation du type $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$
On retrouve cette formule chez Ibn-Yunus (vers 950 – 1009), Johannes Werner (1468-1522) *De triangulis permaximorum circulorum segmenta constructis libri V* (perdu), elle est popularisée en occident par Jacob Christmann (1564 – 1613), la méthode est reprise par Tycho Brahé, astronome (1546 – 1601).

3. Approche historique des nombres logarithmes de J.Neper et de H.Briggs

a. L'idée des travaux de J.Neper

Napier ou Neper théologien, mathématicien, physicien, astronome (écossais, 1550 - 1671) édite deux traités :
En 1614 : Mirifici Logarithmorum canonis descriptio
En 1619 (par son fils) : Mirifici Logarithmorum canonis constructio
Dans descriptio il explique la construction des tables de logarithme.

Les logarithmes sont les nombres qui a des nombres proportionnels et ont des différences égales. C'est Neper qui donne le nom logarithme qui signifie (en grec) nombre de raison :

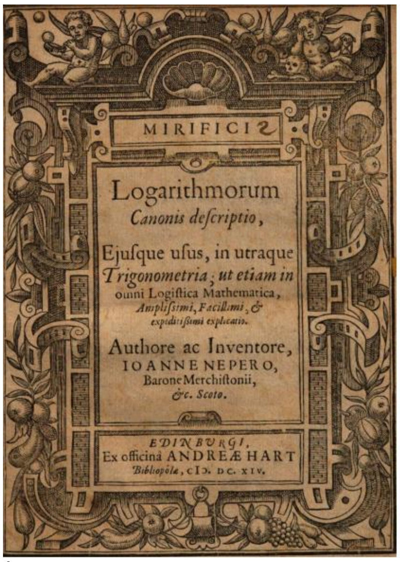
logos : raison, sous-entendu raison de progression arithmétique
arithmos : nombre, quantité.

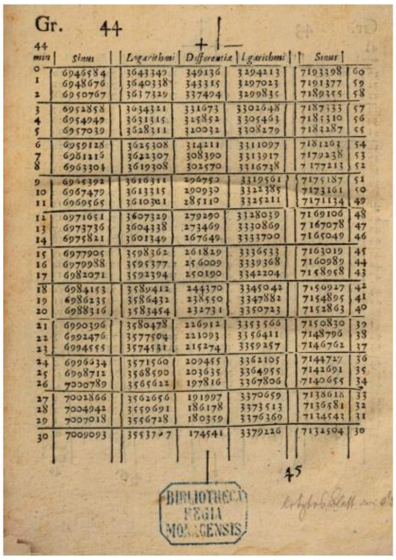
Autrement dit, soient des nombres a, b, c et d dans la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a' - b' = c' - d'$ où les nombres a', b', c' et d' sont les logarithmes des nombres a, b, c et d.
La notion de fonction n'existe pas à l'époque de Neper.
Neper écrira :

« Très illustre amateur de mathématiques, comme rien n'est aussi pénible que la pratique des mathématiques, parce que la logistique est d'autant plus freinée, retardée que les multiplications, les divisions et les extractions des racines carrées ou cubiques portent sur de grands nombres ; qu'elle est soumise à l'ennui des longues opérations et beaucoup plus encore à l'incertitude des erreurs, j'ai entrepris de rechercher par quel procédé sûr et rapide on pourrait éloigner ces obstacles. Dans ce but, j'en ai examiné soigneusement une grande quantité, les uns après les autres, et enfin j'en ai trouvé plus d'un, clair et d'un emploi facile, dont je traiterai probablement ailleurs. À la vérité, aucun, parmi les autres, n'est plus utile que l'un d'eux ; par son moyen, on rejette les nombres utilisés dans les multiplications, les divisions et les extractions de racines lorsqu'elles sont difficiles et prolixes, et on les remplace par d'autres nombres, que j'ai pris soin de leur adjoindre, et l'on achève le calcul par des additions, des soustractions, des divisions par deux et par trois seulement. Est-il un mystère, qui, au milieu de tant d'autres, lui soit supérieur ? Il m'a plu de communiquer son usage au monde des mathématiciens. *»*

Le but de Neper est de construire les tables du sinus et du logarithme, que nous noterons $LOGNEP$ avec la propriété suivante :

Angle	Sinus	Logarithme
α	a	$LOGNEP(a)$
β	b	$LOGNEP(b)$
	ab	$LOGNEP(a) + LOGNEP(b)$

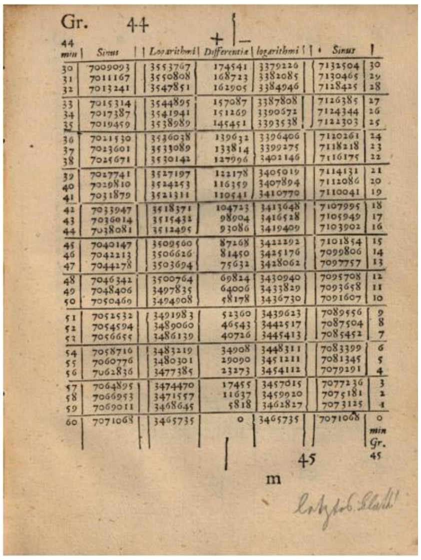




Gr. 44

44 min	Sinus	Logarithmi	Differentiae	Logarithmi	Sinus	
0	6946584	3643349	349136	3294213	7193398	60
1	6948676	3640338	343315	3297023	7191377	59
2	6950767	3637329	337494	3299835	7189355	58
3	6952858	3634321	331673	3302648	7187333	57
4	6954949	3631315	325852	3305463	7185310	56
5	6957039	3628311	320032	3308279	7183287	55
6	6959128	3625308	314211	3311097	7181263	54
7	6961216	3622307	308390	3313917	7179238	53
8	6963304	3619308	302570	3316738	7177213	52
9	6965392	3616311	296750	3319561	7175187	51
10	6967479	3613315	290930	3322385	7173161	50
11	6969565	3610321	285110	3325211	7171134	49
12	6971651	3607329	279290	3328039	7169106	48
13	6973736	3604338	273469	3330869	7167078	47
14	6975821	3601349	267649	3333700	7165049	46
15	6977905	3598362	261829	3336533	7163019	45
16	6979988	3595377	256009	3339368	7160989	44
17	6982071	3592394	250190	3342204	7158958	43
18	6984153	3589412	244370	3345042	7156927	42
19	6986235	3586432	238550	3347882	7154895	41
20	6988316	3583454	232731	3350723	7152863	40
21	6990396	3580478	226912	3353566	7150830	39
22	6992476	3577504	221093	3356411	7148796	38
23	6994555	3574531	215274	3359257	7146762	37
24	6996634	3571560	209455	3362105	7144727	36
25	6998712	3568590	203635	3364955	7142691	35
26	7000789	3565622	197816	3367806	7140655	34
27	7002866	3562656	191997	3370659	7138618	33
28	7004942	3559691	186178	3373513	7136581	32
29	7007018	3556728	180359	3376369	7134543	31
30	7009093	3553767	174541	3379226	7132504	30

45



Gr. 44

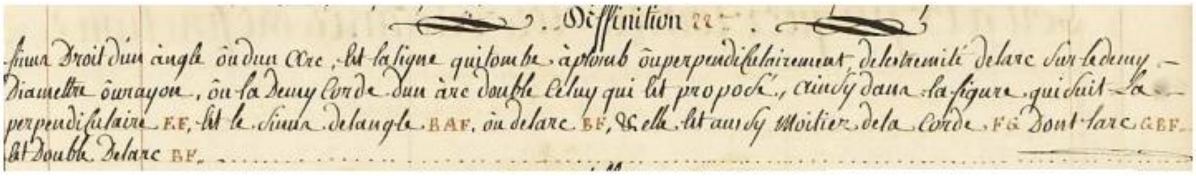
44 min	Sinus	Logarithmi	Differentiae	Logarithmi	Sinus	
30	7009093	3553767	174541	3379226	7132504	30
31	7011167	3550808	168723	3382085	7130465	29
32	7013241	3547851	162905	3384946	7128425	28
33	7015314	3544895	157087	3387808	7126385	27
34	7017387	3541941	151269	3390672	7124344	26
35	7019459	3538989	145451	3393538	7122303	25
36	7021530	3536038	139632	3396406	7120261	24
37	7023601	3533089	133814	3399275	7118218	23
38	7025671	3530142	127996	3402146	7116175	22
39	7027741	3527197	122178	3405019	7114131	21
40	7029810	3524253	116359	3407894	7112086	20
41	7031879	3521311	110541	3410770	7110041	19
42	7033947	3518371	104723	3413648	7107995	18
43	7036014	3515432	98904	3416528	7105949	17
44	7038081	3512495	93086	3419409	7103902	16
45	7040147	3509560	87268	3422292	7101854	15
46	7042213	3506626	81450	3425176	7099806	14
47	7044278	3503694	75632	3428062	7097757	13
48	7046342	3500764	69824	3430940	7095708	12
49	7048406	3497835	64006	3433829	7093658	11
50	7050469	3494908	58178	3436730	7091607	10
51	7052532	3491983	52360	3439623	7089556	9
52	7054594	3489060	46543	3442517	7087504	8
53	7056655	3486139	40726	3445413	7085452	7
54	7058716	3483219	34908	3448311	7083399	6
55	7060776	3480301	29090	3451211	7081345	5
56	7062836	3477385	23273	3454112	7079291	4
57	7064895	3474470	17455	3457015	7077236	3
58	7066953	3471557	11637	3459920	7075181	2
59	7069011	3468645	5818	3462827	7073125	1
60	7071068	3465735	0	3465735	7071068	0

min Gr. 45

45

m

À l'époque le sinus est une grandeur positive, elle est la longueur de la demi-corde de l'arc double, considérée dans un cercle de rayon très grand (pour Neper, le rayon est 10^7).
Selon Jean-Baptiste Denoville, mathématicien français (1732-1783) voici une définition du sinus :

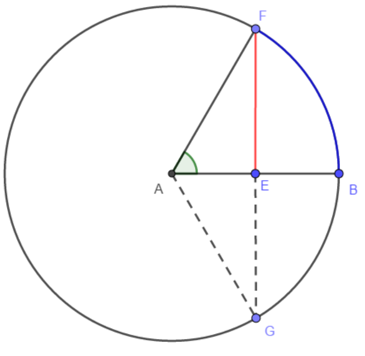


Déffinition 22e

Sinus Droit d'un angle ou d'un arc, est la ligne qui tombe à plomb ou perpendiculairement de l'extremité de l'arc sur le demy diametre ou rayon, ou la demy Corde d'un arc double celuy qui est proposé, ainsy dans la figure qui suit la perpendiculaire EF, est le sinus de l'angle BAF, ou de l'arc BF, & elle est aussy moitiér de la Corde FG dont l'arc GBF est double de l'arc BF.

Sinus droit d'un angle ou d'un arc est la ligne qui tombe à plomb ou perpendiculairement de l'extrémité de l'arc sur le demi diamètre ou rayon, ou la demi corde d'un arc double celui qui est proposé, ainsi dans la figure qui suit la perpendiculaire EF est le sinus de l'angle BAF ou de l'arc BF, & elle est aussi moitié de la corde FG dont l'arc GBF est double de l'arc BF

Le rayon du cercle utilisé n'est pas précisé. Pour Neper, ce rayon est 10^7. Ainsi un sinus est une longueur de segment comprise entre 0 et 10^7.

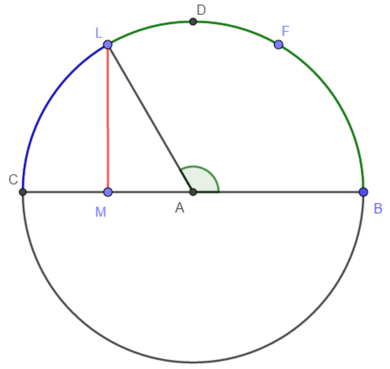


Jean-Baptiste Denoville définira le sinus d'un angle obtus :

Déffinition 24e

Sinus d'un arc au dessus de 90d n'est autre chose que le sinus de son Complément à deux droits ou 180d. C'est à dire, que l'arc proposé étant de 120d le sinus de 60d qui reste de la soustraction du demy cercle est le sinus Complément à deux droits de 120d : ainsy le sinus de l'arc BFDL est LM. parcequelle est sinus de l'arc CL, Complément a deux droits de l'arc BFDL.

Sinus d'un arc au dessus de 90° n'est autre chose que le sinus de son complément à deux droits ou 180°. C'est-à-dire que l'arc proposé étant de 120° le sinus de 60° qui reste de la soustraction du demi-cercle est le sinus complément à deux droits de 120° : ainsi le sinus de l'arc BFDL est LM parce qu'elle est sinus de l'arc CL, complément à deux droits de l'arc BFDL.

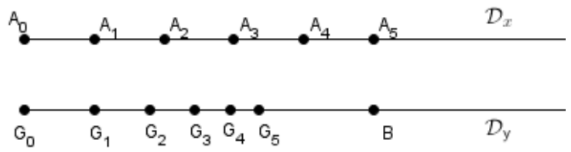


i. Une approche cinématique

Soit deux demi-droites D_x et D_y :

- sur D_x on considère une progression arithmétique
$$L = A_0A_1 = \cdots = A_kA_{k+1}$$
- Sur D_y on considère une progression géométrique telle que $G_0B = 10^7$ et pour $q \in]0;\ 10^7[$,
$$q = \frac{G_1B}{G_0B} = \frac{G_2B}{G_1B} = \cdots = \frac{G_{k+1}B}{G_kB}$$

On a alors $A_0A_k = kL$ et $G_kB = q^kG_0B = 10^7q^k$



Neper associe les grandeurs A_0A_k et G_kB, ainsi le logarithme de Neper, que nous noterons $LOGNEP$ de G_kB est égal à A_0A_k : $LOGNEP(G_kB) = A_0A_k$.

Ainsi $LOGNEP(10^7) = 0$; $LOGNEP(G_1B) = LOGNEP(10^7q) = L$; $LOGNEP(G_kB) = LOGNEP\left(10^7q^k\right) = kL = k.LOGNEP(10^7q)$.

La définition du logarithme de Neper est dans un premier temps discret. Il rendra le logarithme continu en utilisant la cinématique :

- sur D_x le mouvement est uniforme, de A_0 vers A_1, la vitesse v est constante.
- Sur D_y
    - À l'instant 0, en G_0 la vitesse est v.
    - À chaque instant, la vitesse du mobile est proportionnelle à la distance qui le sépare de B, on note C la constante de proportionnalité.

Neper utilise des vitesses moyennes très petites pour justifier son travail, la notion de vitesse instantanée et de calcul infinitésimal n'étant pas encore développés à cette époque. Il serait maladroit de présenter de tels concepts aux élèves, les travaux sont longs et compliqués. La suggestion de traiter le problème avec les outils courant paraît plus adaptée.

En notant G l'emplacement du mobile à l'instant t sur la demi-droite D_y et A celle du mobile A à l'instant t, avec $G_0G = y(t)$ et $A_0A = x(t)$ on a :
Sur D_y, à chaque instant, la vitesse du mobile est proportionnelle à la distance qui le sépare de B, on note C la constante de proportionnalité :

$$y' = C(10^7 - y) \Leftrightarrow y' + Cy = C10^7$$

La solution de cette équation différentielle est $y(t) = 10^7 - 10^7 e^{-Ct}$.
$y'(t) = C10^7 e^{-Ct}$ et à l'instant $t = 0$ les mobiles sur D_x et D_y sont animés de la même vitesse v, soit $y'(0) = x'(0) = C10^7$.
Ainsi $x(t) = C10^7 t$ et $y = 10^7 - 10^7 e^{-\frac{x}{10^7}}$.
En posant $z = GB$ et avec la définition du logarithme de Neper, on a :

$$z = 10^7 - y = 10^7 e^{-\frac{x}{10^7}} \Leftrightarrow x = 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{z}\right)$$

$$LOGNEP(z) = x = 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{z}\right)$$

Ce logarithme « moderne et fonctionnel » de Neper est approximativement celui donné par Neper pour construire ses tables.

ii. Construction d'une table

Avec la fonction logarithme précédente, il est commode et simple de construire la troisième en gardant l'esprit de Neper, à partir de deux logarithmes et les propriétés algébriques du logarithme. Le tableur peut permettre cette construction.

$A = LOGNEP(0{,}9995 \times 10^7) \approx 5001{,}250417$

$B = LOGNEP(0{,}99 \times 10^7) \approx 100503{,}3585.$

Pour deux nombres a et b strictement positif :

$$\begin{aligned} LOGNEP\left(\frac{ab}{10^7}\right) = 10^7 \ln\left(\frac{10^{14}}{ab}\right) &= 10^7\,(\ln(10^{14}) - \ln(ab)) \\ &= 10^7(\ln(10^7) - \ln(a) + \ln(10^7) - \ln(b)) = \\ &= LOGNEP(a) + LOGNEP(b) \end{aligned}$$

Pour n entier naturel :

$$\mathrm{LOGNEP}\left(\frac{a^n}{10^{7(n-1)}}\right) = nLOGNEP(a)$$

Sur tableur :

	A	B	C	D	E	F	G
1	Nombres		1	2	3	4	5
2		**10000000**	**9995000**	**=$C$2^(D1)/10^(7*(D1-1))**	**=$C$2^(E1)/10^(7*(E1-1))**	**=$C$2^(F1)/10^(7*(F1-1))**	**=$C$2^(G1)/10^(7*(G1-1))**
3	1	**9900000**	=C$2*$B3/10^7	=D$2*$B3/10^7	=E$2*$B3/10^7	=F$2*$B3/10^7	=G$2*$B3/10^7
4	2	**=B$3^(A4)/10^(7*(A4-1))**	=C$2*$B4/10^7	=D$2*$B4/10^7	=E$2*$B4/10^7	=F$2*$B4/10^7	=G$2*$B4/10^7
5	3	**=B$3^(A5)/10^(7*(A5-1))**	=C$2*$B5/10^7	=D$2*$B5/10^7	=E$2*$B5/10^7	=F$2*$B5/10^7	=G$2*$B5/10^7
6	4	**=B$3^(A6)/10^(7*(A6-1))**	=C$2*$B6/10^7	=D$2*$B6/10^7	=E$2*$B6/10^7	=F$2*$B6/10^7	=G$2*$B6/10^7
7	5	**=B$3^(A7)/10^(7*(A7-1))**	=C$2*$B7/10^7	=D$2*$B7/10^7	=E$2*$B7/10^7	=F$2*$B7/10^7	=G$2*$B7/10^7
8	6	**=B$3^(A8)/10^(7*(A8-1))**	=C$2*$B8/10^7	=D$2*$B8/10^7	=E$2*$B8/10^7	=F$2*$B8/10^7	=G$2*$B8/10^7
9	7	**=B$3^(A9)/10^(7*(A9-1))**	=C$2*$B9/10^7	=D$2*$B9/10^7	=E$2*$B9/10^7	=F$2*$B9/10^7	=G$2*$B9/10^7
10	8	**=B$3^(A10)/10^(7*(A10-1))**	=C$2*$B10/10^7	=D$2*$B10/10^7	=E$2*$B10/10^7	=F$2*$B10/10^7	=G$2*$B10/10^7
11	9	**=B$3^(A11)/10^(7*(A11-1))**	=C$2*$B11/10^7	=D$2*$B11/10^7	=E$2*$B11/10^7	=F$2*$B11/10^7	=G$2*$B11/10^7
12	10	**=B$3^(A12)/10^(7*(A12-1))**	=C$2*$B12/10^7	=D$2*$B12/10^7	=E$2*$B12/10^7	=F$2*$B12/10^7	=G$2*$B12/10^7
13							
14	Logarithmes		1	2	3	4	5
15		**=10^7*LN(10^7/B2)**	**=10^7*LN(10^7/C2)**	**=D14*$C15**	**=E14*$C15**	**=F14*$C15**	**=G14*$C15**
16	1	**=10^7*LN(10^7/B3)**	=$B16+C$15	=$B16+D$15	=$B16+E$15	=$B16+F$15	=$B16+G$15
17	2	**=B$16*A17**	=$B17+C$15	=$B17+D$15	=$B17+E$15	=$B17+F$15	=$B17+G$15
18	3	**=B$16*A18**	=$B18+C$15	=$B18+D$15	=$B18+E$15	=$B18+F$15	=$B18+G$15
19	4	**=B$16*A19**	=$B19+C$15	=$B19+D$15	=$B19+E$15	=$B19+F$15	=$B19+G$15
20	5	**=B$16*A20**	=$B20+C$15	=$B20+D$15	=$B20+E$15	=$B20+F$15	=$B20+G$15
21	6	**=B$16*A21**	=$B21+C$15	=$B21+D$15	=$B21+E$15	=$B21+F$15	=$B21+G$15
22	7	**=B$16*A22**	=$B22+C$15	=$B22+D$15	=$B22+E$15	=$B22+F$15	=$B22+G$15
23	8	**=B$16*A23**	=$B23+C$15	=$B23+D$15	=$B23+E$15	=$B23+F$15	=$B23+G$15
24	9	**=B$16*A24**	=$B24+C$15	=$B24+D$15	=$B24+E$15	=$B24+F$15	=$B24+G$15
25	10	**=B$16*A25**	=$B25+C$15	=$B25+D$15	=$B25+E$15	=$B25+F$15	=$B25+G$15

Ce qui donne :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Nombres		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		**10000000**	**9995000**	**9990002,5**	**9985007,499**	**9980014,995**	**9975024,988**	**9970037,475**	**9965052,456**	**9960069,93**	**9955089,895**	**9950112,35**
3	1	**9900000**	9895050	9890102,475	9885157,424	9880214,845	9875274,738	9870337,1	9865401,932	9860469,231	9855538,996	9850611,227
4	2	**9801000**	9796099,5	9791201,45	9786305,85	9781412,697	9776521,99	9771633,729	9766747,912	9761864,538	9756983,606	9752105,114
5	3	**9702990**	9698138,505	9693289,436	9688442,791	9683598,57	9678756,77	9673917,392	9669080,433	9664245,893	9659413,77	9654584,063
6	4	**9605960,1**	9601157,12	9596356,541	9591558,363	9586762,584	9581969,203	9577178,218	9572389,629	9567603,434	9562819,632	9558038,223
7	5	**9509900,499**	9505145,549	9500392,976	9495642,779	9490894,958	9486149,511	9481406,436	9476665,733	9471927,4	9467191,436	9462457,84
8	6	**9414801,494**	9410094,093	9405389,046	9400686,352	9395986,009	9391288,016	9386592,372	9381899,075	9377208,126	9372519,522	9367833,262
9	7	**9320653,479**	9315993,152	9311335,156	9306679,488	9302026,148	9297375,135	9292726,448	9288080,085	9283436,045	9278794,327	9274154,929
10	8	**9227446,944**	9222833,221	9218221,804	9213612,693	9209005,887	9204401,384	9199799,183	9195199,284	9190601,684	9186006,383	9181413,38
11	9	**9135172,475**	9130604,889	9126039,586	9121476,566	9116915,828	9112357,37	9107801,191	9103247,291	9098695,667	9094146,319	9089599,246
12	10	**9043820,75**	9039298,84	9034779,19	9030261,801	9025746,67	9021233,796	9016723,18	9012214,818	9007708,711	9003204,856	8998703,254
13												
14	Logarithmes		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
15		**0**	**5001,250417**	**10002,50083**	**15003,75125**	**20005,00167**	**25006,25208**	**30007,5025**	**35008,75292**	**40010,00333**	**45011,25375**	**50012,50417**
16	1	**100503,3585**	105504,609	110505,8594	115507,1098	120508,3602	125509,6106	130510,861	135512,1115	140513,3619	145514,6123	150515,8627
17	2	**201006,7171**	206007,9675	211009,2179	216010,4683	221011,7187	226012,9692	231014,2196	236015,47	241016,7204	246017,9708	251019,2212
18	3	**301510,0756**	306511,326	311512,5764	316513,8269	321515,0773	326516,3277	331517,5781	336518,8285	341520,0789	346521,3294	351522,5798
19	4	**402013,4341**	407014,6846	412015,935	417017,1854	422018,4358	427019,6862	432020,9366	437022,1871	442023,4375	447024,6879	452025,9383
20	5	**502516,7927**	507518,0431	512519,2935	517520,5439	522521,7943	527523,0448	532524,2952	537525,5456	542526,796	547528,0464	552529,2968
21	6	**603020,1512**	608021,4016	613022,652	618023,9025	623025,1529	628026,4033	633027,6537	638028,9041	643030,1545	648031,405	653032,6554
22	7	**703523,5097**	708524,7602	713526,0106	718527,261	723528,5114	728529,7618	733531,0122	738532,2627	743533,5131	748534,7635	753536,0139
23	8	**804026,8683**	809028,1187	814029,3691	819030,6195	824031,8699	829033,1204	834034,3708	839035,6212	844036,8716	849038,122	854039,3724
24	9	**904530,2268**	909531,4772	914532,7276	919533,9781	924535,2285	929536,4789	934537,7293	939538,9797	944540,2301	949541,4806	954542,731
25	10	**1005033,585**	1010034,836	1015036,086	1020037,337	1025038,587	1030039,837	1035041,088	1040042,338	1045043,589	1050044,839	1055046,09

Neper construit la table précédente sur 69 colonnes et 20 lignes.

Ci-dessous, un extrait d'une table établie par Neper :

Gr. 0

0

		+	−			
min	Sinus.	Logarithmi	Differentiæ	logarithmi	Sinus	
0	0	Infinitum	Infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562745	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55
6	17453	63508099	63508083	16	9999986	54
7	20362	61966595	61966573	22	9999980	53
8	23271	60631284	60631256	28	9999974	52
9	26180	59453453	59453418	35	9999967	51

b. L’idée des travaux de Briggs

Henry Briggs (Anglais, 1561-1630), mathématicien, astronome, est enthousiaste de la lecture de Descriptio de Neper. Ils eurent ensemble de nombreuses rencontres et échanges et l'idée d'un système logarithmique germe, le logarithme de 1 serait égal à 0 et le logarithme de 10 serait égal à 10^{14}. Briggs publiera Arithmetica logarithmetica dans lequel il donne ses tables de logarithmes avec 14 chiffres exacts. Puis Briggs travaillera sur le logarithme en base 10, à l'unité on associe 0 et à 10 on associe 1.

i. Construction d’une table

Briggs construit sa table de la manière suivante :

Nombre	Logarithme
10	1
$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$	$0{,}5$
$\sqrt{\sqrt{10}} = 10^{\frac{1}{2^2}}$	$0{,}25$
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = 10^{\frac{1}{2^3}}$	$0{,}125$
…	…
$10^{\frac{1}{2^{54}}} \approx 1$	$\frac{1}{2^{54}}$

Voici un extrait de sa table :


D

Numeri continue Medij inter Denariũ & Vnitatẽ.

E

Logarithmi rationales.

Arithmetica logarithmica, Briggs, 1624, le calcul de $10^{1/2^{54}}$, BM Rennes.

ii. Algorithme et quatraine

Briggs donnera la valeur du logarithme de 2.

Pour se faire il remarque qu'il suffit de connaître le nombre de chiffres qui composent 2^n et prendre n très grand. En effet si le nombre de chiffres de 2^n est k on a :

$$10^{k-1} < 2^n < 10^k$$

Avec le logarithme en base 10, on a alors

$$\frac{k-1}{n} < \log_{10}(2) < \frac{k}{n}$$

Briggs choisit $n = 10^{14}$, en regroupant ses calculs des puissances de 2 en quatraines :
Calcul de 2^{10} : $2^2 = 4$; $2^4 = (2^2)^2$; $2^8 = (2^4)^2$; $2^{10} = 2^8 \times 2^2$

Calcul de 2^{100} : $2^{20} = (2^{10})^2$; $2^{40} = (2^{20})^2$; $2^{80} = (2^{40})^2$; $2^{100} = 2^{80} \times 2^{20}$
Calcul de 2^{1000} : $2^{200} = (2^{100})^2$; $2^{400} = (2^{200})^2$; $2^{800} = (2^{400})^2$; $2^{1000} = 2^{800} \times 2^{200}$
Et ainsi de suite jusqu'à 10^{14}.

```python
def briggs(n):
    '''
    n=14 pour Briggs
    calcul les valeurs des puissances de 2 par quatraine jusqu'à 10^n
    '''
    i=2
    quatraine=0
    a=2
    while 10**quatraine<10**n :
        quatraine=quatraine+1
        a=a**i
        b=a**2
        c=b**2
        d=a*c
        l=len(str(d))
        a=d
    print('2^(10^',quatraine,') admet ',l,'chiffres')

    return
```

In[1]:Briggs(6)

Out[1]: 2^{10^6} admet 301 030 chiffres.

Et $\log_{10}(2) \approx 0{,}301030$.

iii. Algorithme d'Euler sur les travaux de Briggs

Dans son Introduction à l'analyse infinitésimale (traduction française de 1796), Léonhard Euler (1707-1783) reprend les travaux de Briggs et il donne un algorithme pour calculer logarithme de 5.
Cet algorithme se généralise pour calculer tous les logarithmes décimaux entre 1 et la base B du logarithme souhaité (c'est le principe de dichotomie).

Soit la baſe logarithmique $a = 10$, qui eſt celle des tables ordinaires, & propoſons-nous de trouver le logarithme approché de 5. Comme ce nombre eſt renfermé entre les limites 1 & 10, dont les logarithmes ſont 0 & 1, on procédera de la maniere ſuivante à l'extraction des racines, & on continuera les opérations juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à des limites, qui ne different plus du nombre propoſé 5.

		soit
$A = 1{,}000000$;	$lA = 0{,}\ 0000000$	
$B = 10{,}000000$;	$lB = 1{,}\ 0000000$;	$C = \sqrt{AB}$
$C = 3{,}162277$;	$lC = 0{,}\ 5000000$;	$D = \sqrt{BC}$
$D = 5{,}623413$;	$lD = 0{,}\ 7500000$;	$E = \sqrt{CD}$
$E = 4{,}216964$;	$lE = 0{,}\ 6250000$;	$F = \sqrt{DE}$
$F = 4{,}869674$;	$lF = 0{,}\ 6875000$;	$G = \sqrt{DF}$
$G = 5{,}232991$;	$lG = 0{,}\ 7187500$;	$H = \sqrt{FG}$
$H = 5{,}048065$;	$lH = 0{,}\ 7031250$;	$I = \sqrt{FH}$
$I = 4{,}958069$;	$lI = 0{,}\ 6\ 53125$;	$K = \sqrt{HI}$
$K = 5{,}002865$;	$lK = 0{,}\ 6992187$;	$L = \sqrt{IK}$
$L = 4{,}980416$;	$lL = 0{,}\ 6972656$;	$M = \sqrt{KL}$
$M = 4{,}991627$;	$lM = 0{,}\ 6982421$;	$N = \sqrt{KM}$
$N = 4{,}997242$;	$lN = 0{,}\ 6987304$;	$O = \sqrt{KN}$
$O = 5{,}000052$;	$lO = 0{,}\ 6989745$;	$P = \sqrt{NO}$
$P = 4{,}998647$;	$lP = 0{,}\ 6988525$;	$Q = \sqrt{OP}$
$Q = 4{,}999350$;	$lQ = 0{,}\ 6989135$;	$R = \sqrt{OQ}$
$R = 4{,}999701$;	$lR = 0{,}\ 6989440$;	$S = \sqrt{OR}$
$S = 4{,}999876$;	$lS = 0{,}\ 6989592$;	$T = \sqrt{OS}$
$T = 4{,}999963$;	$lT = 0{,}\ 6989668$;	$V = \sqrt{OT}$
$V = 5{,}000008$;	$lV = 0{,}\ 6989707$;	$W = \sqrt{TV}$
$W = 4{,}999984$;	$lW = 0{,}\ 6989687$;	$X = \sqrt{WV}$
$X = 4{,}999997$;	$lX = 0{,}\ 6989697$;	$Y = \sqrt{VX}$
$Y = 5{,}000003$;	$lY = 0{,}\ 6989702$;	$Z = \sqrt{XY}$
$Z = 5{,}000000$;	$lZ = 0{,}\ 6989700$;	

Ainſi, en prenant des moyennes proportionnelles, on eſt parvenu à trouver $Z = 5{,}000000$, à quoi répond le logarithme cherché 0,698970, en ſuppoſant la baſe logarithmique $= 10$. Par conſéquent $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$ à-peu-près. C'eſt de cette maniere que BRIGGS & ULACQ ont calculé la table ordinaire des logarithmes, quoiqu'on ait imaginé depuis des méthodes plus expéditives pour les trouver.

Voici une traduction de cet algorithme en Python :

```
from math import*

def BriggsLog(x,B,p):
    '''
    calcul le logarithme de x en base B  avec une précision de 10^(-p)
    '''
    A=1
    logA=0
    logB=1
    while abs(A-B)>10**(-p):
        if sqrt(A*B)<=x:
            A=sqrt(A*B)
            logA=(logA+logB)/2
        if sqrt(A*B)>x:
            B=sqrt(A*B)
            logB=(logA+logB)/2
        #print(A,logA,B,logB)
    return round(logA,p)
```

In[1]:BriggsLog(2,10,14)
Out[1]:0,30102999566398
In[2]:BriggsLog(2,exp(1),14)
Out[2]:0.69314718055994

4. Approche historique de la fonction logarithme : Après Neper, G.Saint-Vincent

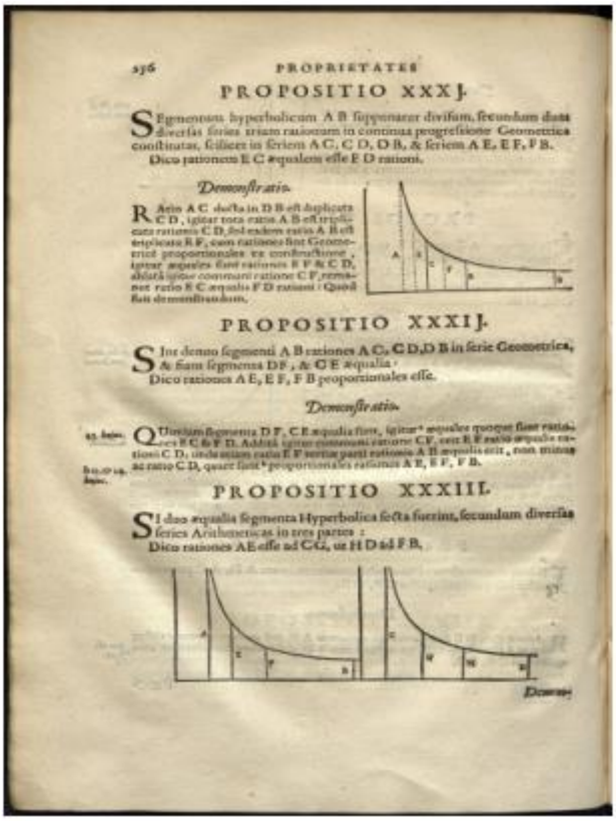
a. Quadrature de l'hyperbole

Grégoire Saint-Vincent (belge 1584-1667), jésuite, mathématicien, géomètre, souhaite faire la quadrature de l'hyperbole.

Il montre que les aires découpées entre l'hyperbole et l'axe des abscisses sont égales si et seulement si les abscisses du découpage sont en progression géométrique

Et si, a, b et c sont en progression géométrique, les aires sous l'hyperbole de base [1,a], [1,b], [1,c] sont en progression arithmétique.

Extrait des travaux de Saint-Vincent :



536 PROPRIETATES

PROPOSITIO XXXI.

Segmentum hyperbolicum A B supponatur divisum, secundum duas diversas series triam rationum in continua progressione Geometrica constitutas, scilicet in seriem A C, C D, D B, & seriem A E, E F, F B.
Dico rationem E C aequalem esse F D rationi.

Demonstratio.

[illegible]

PROPOSITIO XXXII.

Sint denuo segmenti A B rationes A C, C D, D B in serie Geometrica, & fiant segmenta D F, & C E aequalia :
Dico rationes A E, E F, F B proportionales esse.

Demonstratio.

[illegible]

PROPOSITIO XXXIII.

Si duo aequalia segmenta Hyperbolica secta fuerint, secundum diversas series Arithmeticas in tres partes :
Dico rationes AE esse ad CG, ut H D ad F B.

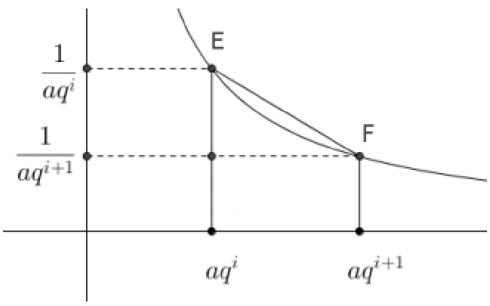
Saint-Vincent ne fait pas référence au logarithme, c'est son ami Sarasa qui signale le comportement logarithmique de l'aire sous l'hyperbole (1649). G.Saint-Vincent sera très critiqué notamment par Marin Mersenne (français 1588-1648), il est reconnu par G.W.Leibniz (allemand 1646-1716) qui dira que « Saint-Vincent n'a pas résolu entièrement la quadrature de l'hyperbole, il n'en reste pas moins qu'il a livré des résultats remarquables. »

On définit l'aire A sous l'hyperbole sur l'intervalle $[1\,;x]$ pour x supérieur à 1 comme $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ et l'aire sous l'hyperbole sur l'intervalle $[x\,;1]$ pour x dans $]0;1]$ comme $-\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

La fonction logarithme ln est celle qui à x réel strictement positif associe $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.

En posant $x = aq^n$ où n est un entier naturel et a et q sont deux nombres réels strictement positifs.

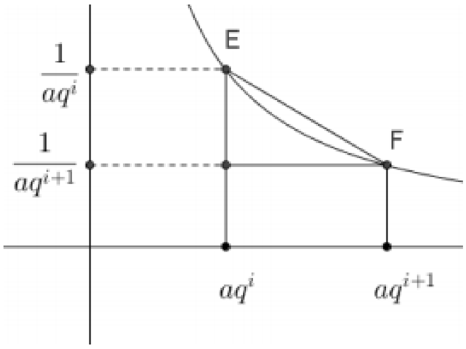
Il construit n trapèzes T_i sur les intervalles $[aq^i\,;aq^{i+1}]$ pour i entier naturel variant de 0 à $n-1$ dont 2 sommets E et Fsont des points de l'hyperbole (on choisit $q > 1$) :



L'aire d'un trapèze T_i est constante égale à $\frac{q^2-1}{2q}$.

Ainsi la somme des aires des n trapèzes T_i est $n.\frac{q^2-1}{2q}$.

Pour n entier fixé et on peut encadrer l'aire sous l'hyperbole :



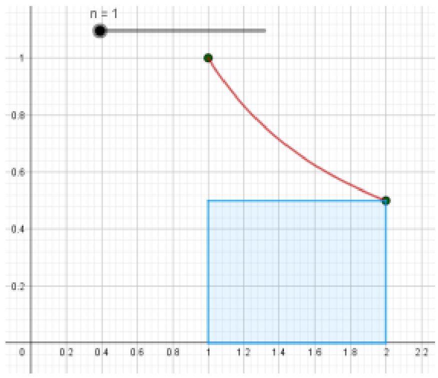
Ainsi sur l'intervalle $[a; aq^n]$ la somme des aires des trapèzes T_i et des rectangles R_i de côté $aq^{i+1} - aq^i = aq^i(q-1)$ et $\frac{1}{aq^{i+1}}$ d'aire constante $\frac{q-1}{q}$; des intervalles $[aq^i\,; aq^{i+1}]$ converge vers A lorsque q tend vers 1.
La démonstration de la convergence n'est pas attendue en mathématiques complémentaires (voir diaporama académie de Limoges Histoire des logarithmes http://pedagogie.ac-limoges.fr/maths/IMG/pdf/une_histoire_des_logarithmes.pdf).
En revanche une animation graphique peut permettre de conjecturer ce résultat.

b. Algorithme de Brouncker

William Brouncker (anglais 1620-1684) est un linguiste et mathématicien. Parmi ses nombreux travaux, on lui doit l'algorithme de la quadrature de l'hyperbole.
Dans un repère orthogonal, on considère l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ sur un intervalle $[a; b]$ avec $0 < a < b$. Si on choisit $a = 1$ on détermine alors $\ln(b)$.
Pour $n = 1$, on considère l'aire A_1 du rectangle formé par les points de coordonnées $(a\,; 0)$; $(b\,; 0)$; $\left(b\,; \frac{1}{b}\right)$; $\left(a\,; \frac{1}{b}\right)$.

$$A_1 = \frac{b-a}{b}$$

Pour $a = 1$, $A_1 = 1 - \frac{1}{b}$.



Pour n entier supérieur ou égale à 2 et j variant de 1 à $n-1$; i variant de 0 à $2^j - 1$ avec un pas de 2, on considère les rectangles formés par les points de coordonnées :

$\left(a + hi\,; \frac{1}{a+h(i+2)}\right)$; $\left(a + h(i+1); \frac{1}{a+h(i+2)}\right)$; $\left(a + h(i+1)\,; \frac{1}{a+h(i+1)}\right)$; $\left(a + hi\,; \frac{1}{a+h(i+1)}\right)$;

avec $h = \frac{b-a}{2^j}$.

L'aire d'un rectangle est $A_i = h\left(\frac{1}{a+h(i+1)} - \frac{1}{a+h(i+2)}\right) = \frac{h^2}{a^2+ah(2i+3)+h^2(i+1)(i+2)}$

Figure pour $n = 2$

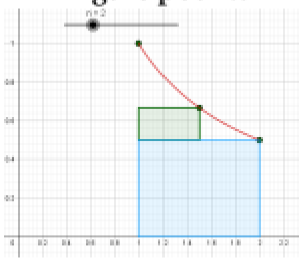


Figure pour $n = 3$

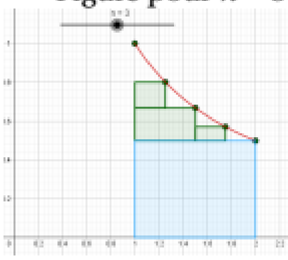
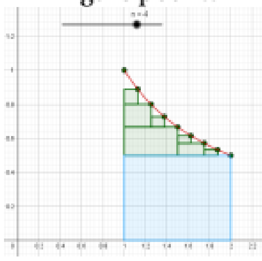


Figure pour $n = 4$



$j = 1$	$i = 0$				$h = \frac{b-a}{2}$
$j = 2$	$i = 0$	$i = 2$			$h = \frac{b-a}{4}$
$j = 3$	$i = 0$	$i = 2$	$i = 4$	$i = 6$	$h = \frac{b-a}{8}$

La somme des aires des rectangles convergent vers $\ln(b) - \ln(a)$.

Pour $a = 1$ et $b = 2$ on a $h = \frac{1}{2^j}$.

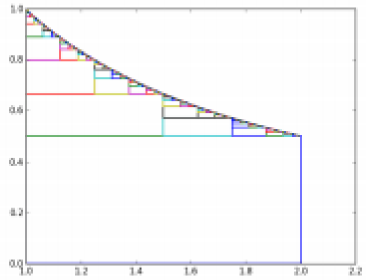
$$A_j = \frac{1}{2^j}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2^j}(i+1)} - \frac{1}{1+\frac{1}{2^j}(i+2)}\right) = \frac{1}{(2^j+i+1)(2^j+i+2)}$$

j	$i; A_i$	$i; A_i$	$i; A_i$	$i; A_i$	h
$j = 1$	$i = 0$; $A_i = \frac{1}{3\times4}$				$\frac{1}{2}$
$j = 2$	$i = 0$; $A_i = \frac{1}{5\times6}$	$i = 2$; $A_i = \frac{1}{7\times8}$			$\frac{1}{4}$
$j = 3$	$i = 0$; $A_i = \frac{1}{9\times10}$	$i = 2$; $A_i = \frac{1}{11\times12}$	$i = 4$; $A_i = \frac{1}{13\times14}$	$i = 4$; $A_i = \frac{1}{15\times16}$	$\frac{1}{8}$

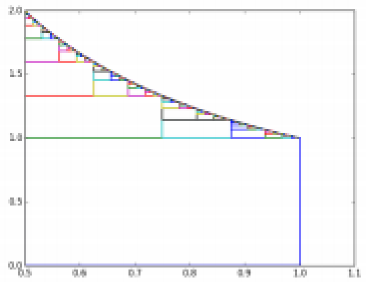
On admet que $\ln(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$.

```python
#algorithme de Brouncker

import matplotlib.pyplot as plt


def f(x):
    return 1/x

def aire_rectangle(A,B,C,D):
    return (B[0]-A[0])*(D[1]-A[1])

def rectangle(A,B,C,D):
    return plt.plot([A[0],B[0],C[0],D[0],A[0]],[A[1],B[1],C[1],D[1],A[1]] ,linewidth=1.5)

def brouncker(a,b,n):
    A=[a,0]
    B=[b,0]
    C=[b,f(b)]
    D=[a,f(b)]
    rectangle(A,B,C,D)
    s=aire_rectangle(A,B,C,D)
    for j in range(1,n):
        h=(b-a)/(2**j)
        for i in range(0,int(2**(j)),2):
            A=[a+h*i,f(a+h*(i+2))]
            B=[a+h*(i+1),f(a+h*(i+2))]
            C=[a+h*(i+1),f(a+h*(i+1))]
            D=[a+h*i,f(a+h*(i+1))]
            rectangle(A,B,C,D)
            s=s+aire_rectangle(A,B,C,D)
    plt.show()
    return s
```

In [1]: brouncker(1,2,10)
Out[1]: 0.6926591377284118



In [2]: brouncker(0.5,1,10)
Out[2]: 0.6926591377284118



Leonhard Euler , Introduction à l'analyse infinitésimale, Volume 1 Google Book 1796
https://books.google.fr/books?id=XMo7AAAAcAAJ&pg=PA73&dq=euler+logarithme&hl=fr&ei=4RztTO7GJ8254ga-7vSBAQ&sa=X&oi=book_result&ct=book-thumbnail#v=onepage&q&f=false
Jean. Charles Naux, *Histoire des logarithmes de Néper à Euler, t. I : La découverte des logarithmes et le calcul des premières tables*. In: *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, tome 20, n°3, 1967. p. 302.
https://www.persee.fr/doc/rhs_0048-7996_1967_num_20_3_2537_t1_0302_0000_1
Simone Trompler, L'histoire des logarithmes, ULB-CeDop – 1996 – n°21
https://www2.ulb.ac.be/docs/cedop/index_12.html
Gilbert ARSAC, Histoire de la découverte des logarithmes, I.R.E.M. de Lyon, Bulletin de l'APMEP n°299- Juin 1975
Nicole Vogel, La construction des logarithmes de Neper, Article paru dans l'Ouvert - Journal de l'APMEP d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg - N° 55 / Juin 1989
https://nvogel.pagesperso-orange.fr/Dossiers/Logarithme%20népérien/logNeperien.pdf
Daniel Justens, la petite histoire couplée de l'exponentielle et de l'actuariat, ULB-CeDop – 2002
https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AJa27_Daniel_Justens.pdf
IREM, Histoire des logarithmes, Ellipse, 2006
http://www.univ-irem.fr/spip.php?article667
Jean Pierre Le Goff, La démonstration mathématique dans l'histoire. De la méthode dite d'exhaustion : Grégoire Saint-Vincent (1584-1667) p. 197-220, IREM de Lyon, 1990.
http://publimath.univ-irem.fr/biblio/IWH90011.htm

André Bonnet, Neper a-t-il vraiment inventé les logarithmes népériens ?, diaporama, Apmep, université de Provence, 2017.

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/JR_Apmep_13-05-2017.pdf

Association Sciences en Seine et Patrimoine (ASSP) de Rouen, 1-lignes trigonométriques de Denoville, document en ligne sur Internet,

http://assprouen.free.fr/fichiers/analyses_scientifiques/trigonometrie_plane/1_lignes_trigonometriques.pdf