

## Olympiades de mathématiques 2024

### Partie Académique

**Les énoncés doivent être rendus** au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

**Exercice 1 : Echauffement... des muscles triangulaires...**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère un triangle équilatéral de côté  $n$  cm.

Déterminer, en fonction de  $n$ , le nombre de triangles équilatéraux de côté 1 cm qu'il faut pour recouvrir exactement le triangle équilatéral de côté  $n$  cm.

**Exercice 2 : Sorcellerie en 2024 !**

« Ensorceler » un nombre, c'est calculer le quotient de la différence du triple de ce nombre et de 5 par la somme de ce nombre et de 1.

Pour gagner le tournoi des trois sorciers, Horry Patter doit résoudre l'énigme suivante : qu'advient-il d'un nombre ensorcelé 2 024 fois ?

1. Répondre à cette question en justifiant votre réponse (sans baguette magique !).
2. Horry Patter affirme que certains nombres refusent de se laisser ensorceler une fois, deux fois, plusieurs fois !

A-t-il raison ? Si oui, trouver tous ces nombres. Si non, pourquoi ?

### ☑ Exercice 3 : Une histoire d'héritage



Albert, un vieil oncle un peu excentrique et fêru de mathématiques, a laissé en héritage à ses quatre neveux Leïla, Fatou, Pablo et Thomas, un coffre contenant toute sa fortune.

Ce coffre est verrouillé par un code numérique. Albert voulait faire en sorte que le code ne puisse être révélé en l'absence d'un des neveux. Chacun reçut donc par testament une lettre avec un indice et seule leur mise en commun pouvait permettre de trouver le code.

- ✓ Sur la lettre de Thomas était écrit  $A(9; 1\ 673)$
- ✓ Sur la lettre de Pablo, il y avait inscrit  $B(-18; 1\ 862)$
- ✓ Sur la lettre de Leïla était noté  $C(54; 4\ 598)$
- ✓ Sur celle de Fatou, il était indiqué qu'elle devrait utiliser le nombre de quatre chiffres, formé en accolant le jour et le mois de naissance d'Albert né un quatorze décembre.

L'exécuteur testamentaire leur remit alors une lettre commune écrite par Albert. La voici :

*« Mes chers petits,*

*Vous voici chacun en possession d'un indice. Si vous unissez vos forces, vous pourrez découvrir mon trésor. Pardonnez à un vieil homme amoureux des mathématiques de vous proposer un petit exercice. Les trois points dont vous avez les coordonnées sont situés sur une même parabole dont vous devez trouver une équation. Une fois cela fait, le code qui ouvrira mon coffre est l'image du nombre indiqué dans la lettre de Fatou par le trinôme en question. A vous de jouer ! »*

Mais quel est donc ce code qui ouvrira le coffre ?

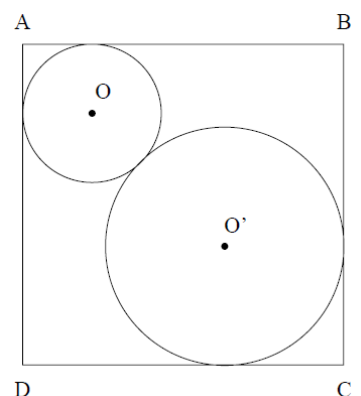
### ☑ Exercice 4 : Deux anneaux olympiques en compétition dans un carré !

Soit un carré ABCD de côté  $a$ .

On considère un premier cercle  $(\Gamma)$  de rayon  $r$ , intérieur au carré et tangent à  $(AB)$  et  $(AD)$ .

On considère un second cercle  $(\Gamma')$  de rayon  $r'$ , intérieur au carré et tangent extérieurement à  $(\Gamma)$  ainsi qu'aux droites  $(CB)$  et  $(CD)$ .

On nomme  $S$  la somme des aires des cercles  $(\Gamma)$  et  $(\Gamma')$ .



1. Justifier que  $r + r' = a(2 - \sqrt{2})$ .
2. Déterminer l'intervalle auquel appartient chaque rayon des deux cercles  $(\Gamma)$  et  $(\Gamma')$ .
3. a. Déterminer par le calcul la valeur minimale de  $S$ .  
b. Déterminer par le calcul la valeur maximale de  $S$ .