

Olympiades de mathématiques 2023

Partie Académique

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

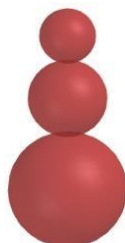
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Exercice 1 : Décorations de Noël...

Dans le but de fabriquer des décorations de Noël pour sa ville et dans un souci de limitation du budget alloué à ces décorations, un maire demande à ses services techniques communaux de réutiliser les boules de Noël achetées l'année précédente pour les empiler, en leurs centres, sur des câbles verticaux de 5,90 mètres dont dispose déjà la commune (voir illustration ci-dessous).



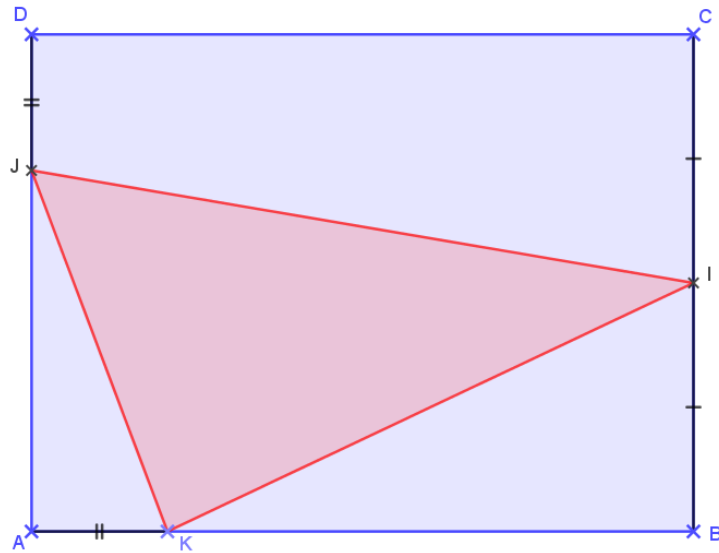
La première boule à la base a un rayon de 1 mètre puis, à partir de la 2^{ème} boule, le rayon de chaque boule est égal aux deux tiers du rayon de la boule précédente.

Combien de boules pourra-t-il y avoir au maximum sur la longueur de câble vertical choisi ?

Exercice 2 : Décoration toujours...mais en porcelaine de Limoges !

Une fabrique de porcelaine de Limoges souhaite rafraîchir le hall d'entrée de son magasin pour le moderniser.

Sur les conseils d'un architecte, le mur de la façade, représenté ci-dessous par un rectangle ABCD tel $AB = 4$ m et $BC = 3$ m sera ornémenté d'un motif triangulaire en porcelaine, représenté ci-après par le triangle IJK, de sorte que I soit le milieu du segment [BC] et que les points J et K appartiennent respectivement aux segments [AD] et [AB] avec $DJ = AK$.

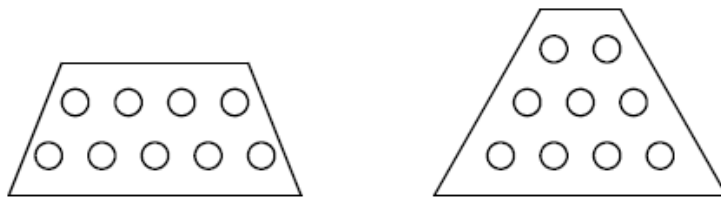


Quelles positions des points J et K rendent l'aire du triangle minimale et permettent ainsi de faire des économies ?

A vous de jouer !

Exercice 3 : L'année 2023 dans tous ses états !

1. Déterminer les trois couples de nombres entiers naturels $(u ; v)$ tels que $u \times v = 2023$ avec $u < v$.
2. Déterminer tous les nombres entiers positifs a tels que $a^2 + 2023$ soit le carré d'un entier positif.
3. Le but de cette question est de chercher, s'ils existent, des entiers naturels a tels que $a^3 + 2023$ soit le cube d'un entier positif.
 - a) Pour tous nombres entiers naturels a et b , démontrer que $b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ab + a^2)$
 - b) Déterminer s'il existe des entiers naturels a tels que $a^3 + 2023$ soit le cube d'un entier positif.
4. On dit qu'un nombre est trapézoïdal s'il peut s'exprimer comme une somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs dont le plus petit n'est pas nul. Ainsi par exemple 9 peut s'écrire $4 + 5$ ou bien encore $2 + 3 + 4$, comme illustré ci-dessous.



Mais au fait, de combien de façons 2023 est-il un nombre trapézoïdal ?