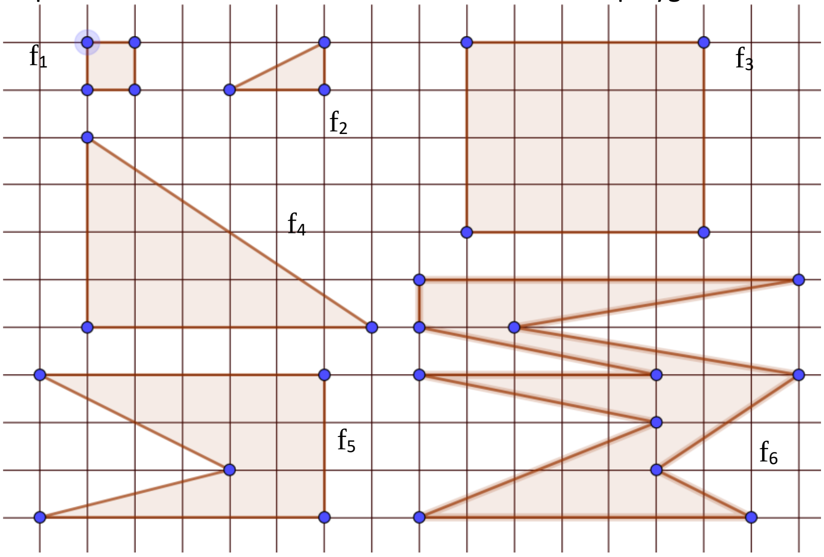
Le théorème de Pick.
On se place dans un repère orthonormé et **tous les polygônes considérés ont leurs sommets à coordonnées entières**. Ils seront également non-croisés, autrement dit deux côtés non consécutifs ne se coupent pas.

1) Pour un polygone de grande taille, le nombre de points à coordonnées entières (appelés points entiers dans la suite) situés à l'intérieur du polygône donne une approximation grossière de l'aire du polygône.
En ajoutant à ce nombre la moitié du nombre de points entiers situés sur le bord du polygône, on obtient une meilleure approximation. En effet, ces points sont « à moitié dans et à moitié hors » du polygone.



Pour chacune des figures f_1 à f_6 ci-dessus :
a) compter le nombre I de points entiers se trouvant à l'intérieur du polygône et le nombre B de points entiers se trouvant sur le bord du polygone.
b) Calculer $I+\dfrac{B}{2}$.
c) Calculer l'aire du polygone.
d) Recopier et compléter le tableau suivant :

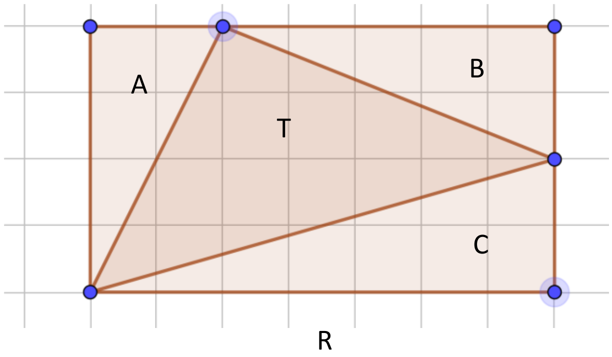
Figure	I	$B/2$	$I+B/2$	Aire
f_1				
f_2				
f_3				
f_4				
f_5				
f_6				

e) Quelle formule peut-on conjecturer permettant de calculer l'aire d'un polygône à partir de I et B ?

2) Considérons un rectangle de largeur λ et de longueur L et dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées (comme l'est le rectangle de la figure 3).
a) Quelle est son aire ?
b) Quel est le nombre I de points entiers intérieurs au rectangle ?
c) Quel est le nombre *B* de points entiers situés sur le bord du rectangle ?
d) Vérifier la conjecture pour ce rectangle.

3) Considérons un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes de coordonnées (comme l'est le triangle de la figure 4), et ont pour longueur *m* et *n* respectivement. Soit *k* le nombre de points entiers situés sur l'hypoténuse.
a) Quelle est l'aire de ce triangle ?
b) Quel est le nombre de point entiers situés sur le bord du triangle ?
c) Quel est le nombre de points entiers intérieurs au triangle ?
d) Vérifier la conjecture pour ce triangle.

4) Considérons un triangle quelconque *T*. Toutes les situations peuvent plus ou moins se ramener à la figure suivante dans laquelle le triangle *T* est complété pour former un rectangle *R* dont les côtés sont parallèles aux axes en rajoutant jusqu'à trois triangles rectangles *A*, *B* et *C* dont les côtés de l'angle droit sont également parallèles aux axes.



On note I_A, I_B, I_C, I_T, I_R, le nombre de points entiers intérieurs aux triangle *A*, *B*, *C*, au triangle *T* et au rectangle *R*, respectivement.

De même, on note B_A, B_B, B_C, B_T, B_R le nombre de points entiers situés sur le bord des polygônes de la figure.

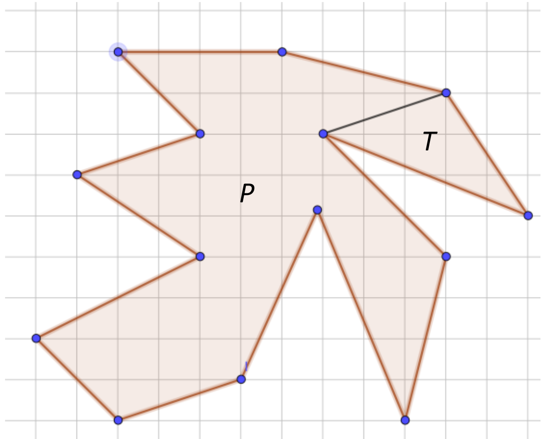
Enfin, notons $\mathrm{a}(T)$ l'aire du triangle *T*.

a) Etablir une relation entre B_A, B_B, B_C, B_T et B_R.

b) Exprimer I_R en fonctions des données de la question.

c) Démontrer que $\mathrm{a}(T) = I_T + \frac{B_T}{2} - 1$.

5) Nous admettrons qu'on polygône quelconque peut être découpé en un nombre fini de triangles dont les sommets sont des sommets du polygône. D'après 4) la formule marche pour tous les triangles.



Démontrer que, si la formule marche pour un polygône *P*, elle marche également en lui adjoignant un triangle *T* avec lequel *P* a un côté commun.