TEMPS D'ATTENTE

Introduction :

- Ce thème offre l'opportunité de travailler sur des situations concrètes qui sortent des situations étudiées usuellement en cours et qui sont modélisés par la loi binomiale ou la loi normale. Bien au contraire, l'étude de quelques exemples simples, parfois paradoxales, permet de différentier et d'institutionnaliser les concepts de loi discrètes et de lois continues et particulièrement la notion de densité.
- La propriété d'absence de mémoire ou de vieillissement peut être à la fois très intuitive dans le cas discret et, en même temps, déroutante pour les élèves dans le cas continu. Ainsi, on comprend très bien qu'un dé équilibré aura toujours une chance sur 6 de sortir le numéro 6 la 1001ème fois que je le lance même si celui-ci n'est jamais sorti ; le dé n'a pas de mémoire. Par contre, dire qu'une ampoule a la même probabilité de fonctionner encore 30 heures qu'elle ait déjà fonctionné 1000 heures ou non est moins évident à concevoir. L'outil mathématique aide à la compréhension du monde.

Cette notion invite donc à partir de cas concrets pour bien délimiter le passage à la modélisation mathématiques. Le cours ne peut que s'enrichir d'exemples et de simulations. L'étude de quelques paradoxes et de situations où le temps est abordé comme variable discrète ou continue mobilise les connaissances de la première partie.

A) LES CONNAISSANCES INDISPENSABLES

Lois à densité et lois uniformes continues :

Il est possible de partir d'un exercice simple mettant en jeu une loi uniforme continue pour retrouver par induction – même si cela n'est pas habituel – les propriétés que doit vérifier une loi de densité.

Exemple : Jean doit rejoindre Pierre au self entre 13h et 14h. Il peut arriver n'importe quand pendant cette heure. Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 13h20 ? après 13h40 ? entre 13h25 et 13h35 ?

Une recherche sur un schéma simple, première étape de la modélisation, permet d'illustrer les définitions suivantes :

- Toute fonction f définie, continue et positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1 peut être considérée comme loi de densité.
- Une loi à densité sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une loi uniforme si elle est constante.

Les propriétés d'une loi uniforme sur un intervalle [a ; b] (a<b) peuvent alors faire l'objet d'un exercice très classique :

- Montrer que si f est une loi uniforme alors $f(x) = \frac{1}{b-a}$ pour $x \epsilon [a\,;b]$
- Montrer que si X suit une loi uniforme sur $[a\,;b]$ alors :
  La probabilité de P($c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$ si $a \leq c \leq d \leq b$

- Montrer que l'espérance E(X) est égale à $\frac{a+b}{2}$

Le calcul de la variance de X ne présente pas de difficulté particulière en intégrant $x^2 f(x)$ et peut faire l'objet également d'une question d'exercice.

V(X) = $\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx - [E(X)]^2$ = $[\frac{x^3}{3(b-a)}]_a^b - (\frac{a+b}{2})^2$
V(X) = $\frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4}$ = $\frac{1}{12}[4(b^2+ab+a^2) - 3(a^2+2ab+b^2)]$
V(X) = $\frac{1}{12}(b-a)^2$

Dès lors, plusieurs applications de complexité croissante peuvent être abordés, la difficulté reposant sur le choix de la variable aléatoire.

Exercice :

Pierre étudie à la bibliothèque entre 14h30 et 16h. Jean y arrive entre 13h30 et 17h30 selon ses activités.

- *Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?*
- *Jean n'est toujours pas arrivé à 15h. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?*
- *A quelle heure peut-on espérer voir arriver Jean ?*

Posons X la variable aléatoire uniforme définie sur [0 ; 240] : temps d'arrivée possible en minutes de Jean à partir de 13h30 jusqu'à 17h30. Pierre est présent sur [60 ; 150].

Pierre			**14h30**	***15h***	**16h**			
Jean	**13h30**							**17h30**
X	**0**		**60**	***90***	**150**			**240**

Dès lors,

P(« Pierre et Jean se rencontrent ») = $P(60 \leq X \leq 150) = \frac{150-60}{240} = 0{,}375$

Si Jean n'est pas arrivé à 15h (probabilité conditionnelle), alors la probabilité est donnée par :

P(« Pierre et Jean se rencontrent »/ « Jean arrive après 15h ») = $\frac{P(90 \leq X \leq 150)}{P(90 \leq X \leq 240)}$

$$= \frac{150-90}{240} \Big/ \frac{240-90}{240}$$

$$= \frac{60}{150} = 0{,}4$$

Ces 2 calculs de probabilités sont visuellement évidentes : $\frac{3}{8}$ et $\frac{2}{5}$

L'espérance de X est donnée par la formule et peut également se déduire du schéma (120 minutes) pour une heure moyenne d'arrivée de 15h30

Lois géométriques :

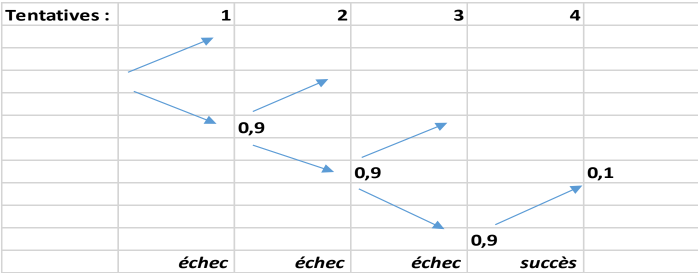
Loi géométrique tronquée

Là encore, il est possible de partir d'une situation concrète pour définir la loi géométrique tronquée avant de passer à la limite pour définir la loi géométrique et ses propriétés. Les calculs sont plus complexes mais l'utilisation des formules de limites exponentielles est explicite et l'ensemble est plus rigoureux.

Exercice :

Je fais tourner une roue numérotée de 0 à 9 successivement 4 fois. Quelle est la probabilité que le 0 ne sorte qu'a la 4ème tentative ?

Le calcul, via un arbre d'issues, est simple et l'élève trouve facilement pour 3 échecs avant une réussite $\left(\frac{9}{10}\right)^3 \times \frac{1}{10}$



Posons X la variable aléatoire : X = i si le 0 sort la $i$ème fois sur les 4 essais ($0 \leq i \leq 4$). L'élève peut donner alors la loi de probabilité de X ainsi que son espérance et sa variance pour s'entrainer avant de passer au cas général :

On se place alors dans une situation de Bernoulli : une expérience est répétée n fois de façon aléatoire et indépendante chaque fois. L'issue de chaque expérience a une probabilité p de réussite. On définit la variable aléatoire X comme le rang du premier succès avec X = 0 si les n essais sont des échecs.

- Donner la loi de probabilité de X
- Calculer son espérance

La première question est accessible aux élèves mais la suivante nécessite l'accompagnement de l'enseignant.

P$(X = i) = p(1-p)^{i-1}$ si $0 < i \leq n$;

et $P(X = 0) = (1-p)^n$

Pour le calcul de l'espérance :

E(X) = $\sum_{i=1}^{n} ip\,(1-p)^{i-1} + 0 \times (1-p)^n$

soit E(X) = $\frac{p}{1-p} \sum_{i=0}^{n} i\,(1-p)^i$

On calcule séparément $S_n = \sum_{i=0}^{n} i(1-p)^i$

$S_n = (1-p) + 2(1-p)^2 + 3(1-p)^3 + \ldots +$ (n-1)$(1-p)^{n-1} + n(1-p)^n$ (1)

Astuce de calcul (utilisée souvent dans la somme des termes d'une suite géométrique) : on multiplie chaque terme par $(1-p)$:

$(1-p)S_n = (1-p)^2 + 2(1-p)^3 + 3(1-p)^4 + \cdots + (n-1)(1-p)^n + n(1-p)^{n+1}$ (2)

D'où, en soustrayant (2) de (1) :

$pS_n = (1-p) + (1-p)^2 + \cdots + (1-p)^n - n(1-p)^{n+1}$

On reconnait une somme géométrique, excepté le dernier terme.

$pS_n = \frac{(1-p) - (1-p)^{n+1}}{1-(1-p)} - n(1-p)^{n+1}$

Au final : $S_n = \frac{(1-p)}{p^2}[1 - (1-p)^n] - \frac{n}{p}(1-p)^{n+1}$

En reportant dans le calcul de E(X) et en simplifiant, on obtient :

E(X) = $\frac{1}{p}[1 - (1-p)^n] - n(1-p)^n$ (3)

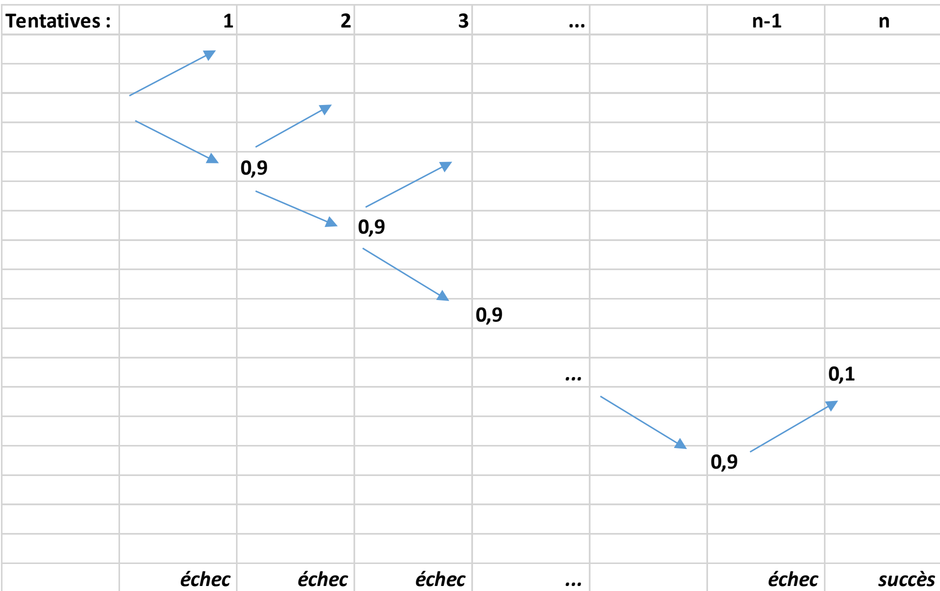
Autre expression rencontrée : E(X) = $\frac{1}{p}[1 - (1+np)(1-p)^n]$

Cette espérance est celle d'une loi géométrique tronquée : le nombre n de répétitions de l'expérience est fini.

La variance de la loi géométrique tronquée n'a pas d'expression simple.

Loi géométrique :

Reprenons le cadre de l'exercice : je réessaie sans limite jusqu'au succès, c'est-à-dire sortir le 0. On s'interroge donc sur la probabilité de voir sortir le 0 pour la première fois à la nième tentative



La probabilité que le 0 sorte à la nième tentative est donc :

$P(X = n) = (0{,}9)^{n-1}(0{,}1)$

L'espérance mathématique est donnée par

E(X) = $10[1 - \left(1 - \frac{n}{10}\right)(0{,}9)^n]$

Le passage à la limite pour n tendant vers $+\infty$ donne simplement 10.

Autrement dit : il faut faire en moyenne 10 tirages pour obtenir un évènement de probabilité $\frac{1}{10}$, ce qui n'étonnera personne...

Cas général :

On définit X la variable aléatoire qui correspond aux nombre de tentatives jusqu'au succès. On notera qu'il s'agit alors d'une variable aléatoire discrète infinie à valeur dans N^*.

Si $p \neq 0, on\ a\ P(X = 0) = \lim_{n\to\infty}(1-p)^n = 0$ donc la valeur 0 n'est pas une valeur possible de X, ce qui est une différence essentielle avec la loi géométrique tronquée. Le raisonnement à l'œuvre avec la loi tronquée est le même et la loi de probabilité de X est donnée par :

$$P(X = i) = p(1-p)^{i-1}$$

Pour le calcul de l'espérance de X, on reprend l'expression (3) en faisant tendre $n \to +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} n(1-p)^n$ = $\lim_{n\to+\infty} ne^{n\ln(1-p)}$ or 1-p < 1 et ln(1-p) < 0

Donc $\lim_{n\to+\infty} n(1-p)^n = 0$

De même $\lim_{n\to+\infty}(1-p)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1-p)} = 0$

Et E(x) = $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p}[1 - (1-p)^n] - n(1-p)^n = \frac{1}{p}$

Pour le calcul de la variance, il faudrait faire appel (deux fois) à la dérivabilité des séries entières ce qui est totalement hors programme pour justifier que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} i^2p(1-p)^{i-1}$ = $\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$

On admettra donc que V(X) = $\frac{1-p}{p^2}$

Lois discrètes sans mémoire

On parle également de lois sans vieillissement. Une loi de probabilité d'une variable aléatoire X est sans mémoire si pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, on a :

$P(X > m + n/X > n) = P(X > m)$

Autrement dit, quel que soit le nombre de triages déjà opérés sans succès (ici n tirages), la probabilité d'avoir un succès à partir du $m$ième tirage reste la même. L'exemple du lancer de dé illustre parfaitement cette propriété.

Une loi géométrique est sans mémoire :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.

$P(X > m) = \lim_{k\to+\infty}\sum_{i=1}^{k} P(X = m+i) = \lim_{k\to+\infty}\sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{m+i}$

$P(X > m) = p(1-p)^m \lim_{k\to+\infty}\sum_{i=1}^{k}(1-p)^i$= $p(1-p)^m \times \lim_{k\to+\infty}\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)}$

$P(X > m) = p(1-p)^m \times \frac{1}{1-(1-p)} = p(1-p)^m \times \frac{1}{p}$

Soit $P(X > m) = (1-p)^m$

Or $P(X > m+n/X > n) = \frac{P(X>m+n)}{P(X>n)} = \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^n} = (1-p)^m$

Donc $P(X > m+n/X > n) = P(X > m)$; ce qui est la condition d'une absence de mémoire.

Une loi géométrique est donc une loi sans mémoire (lancer de dés...)

Une loi discrète sans mémoire est géométrique :

La réciproque est intéressante car elle caractérise alors la loi géométrique comme la seule loi discrète sans mémoire.

Soit X une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ suivant une loi sans mémoire donc vérifiant pour tout entier positif non nul m :

$P(X > m+1/X > m) = P(X > 1)$ or $P(X > 1) = 1 - P(X = 1)$

Si on pose $p = P(X = 1)$ $alors$ $P(X > m+1/X > m) = 1-p$

On obtient alors $\frac{P(X>m+1)}{P(X>m)} = 1-p$ et on peut définir la suite $\left(P(X > m)\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$comme étant une suite géométrique de raison $(1-p)$

D'où $P(X > m) = (1-p)^{m-1} \times P(X > 1) = (1-p)^m$

Enfin $P(X = m) = P(X > m-1) - P(X > m) = (1-p)^{m-1} - (1-p)^m$

$P(X = m) = (1-p)^{m-1}[1-(1-p)] = p(1-p)^{m-1}$

X suit bien une loi géométrique de paramètre p

Nous avons donc identité entre loi géométrique et loi discrète sans mémoire.

Lois continues sans mémoire et lois exponentielles :

Le texte de présentation de la notion invite à introduire la loi exponentielle à partir de la propriété d'absence de mémoire.

Supposons une variable aléatoire X définie sur $[0;\ +\infty[$ suivant une loi de probabilité P sans mémoire et de fonction de répartition F telle que F(x) = $P(X < x)$.

On définit la fonction G par G(x) = 1 – F(x) = $P(X > x)$. G est donc définie sur $[0;\ +\infty[$ à valeur dans [0 ;1]

Pour tout réels x, y

$P(X > x+y/X > y) = \frac{P(X>x+y)}{P(X>y)} = P(X > x)$

d'où $P(X > x+y) = P(X > x) \times P(X > y)$

Soit $G(x+y) = G(x) \times G(y)$: équation fonctionnelle de l'exponentielle. Nous ne reproduisons pas ici la construction de la fonction exponentielle en détail.

F est dérivable donc G est dérivable. F comme fonction de répartition est croissante donc G est décroissante. G est appelé également « fonction de survie ».

On a G(0)=1

et $\lim_{x \to +\infty} G(x) = 1 - \lim_{x \to +\infty} F(x) = O$

Donc G s'écrit sous la forme $G(x) = e^{-\lambda x}$; $\lambda > 0$

On peut alors retrouver la fonction de densité f telle que :$\int_0^x f(t)dt = F(x) = 1 - G(x)$

En passant à la dérivée : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Propriétés de la loi exponentielle :

On peut étudier également la loi exponentielle de paramètre λ dans le cadre d'exercices :

- Montrer que la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = 0 \; si \; x < 0 \\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \; pour \; x \geq 0 \end{cases}$ est une fonction de densité sur $\mathbb{R}$.
- Donner alors une expression de sa fonction de répartition.
- Soit la fonction g définie sur [0 ;+∞[par $g(x) = (\lambda x + 1)e^{-\lambda x}$. Calculer la dérivée de g. En déduire l'espérance de X.

Si le calcul de la fonction de répartition ne pose aucun problème, les calculs directs de E(X) et de V(X) impliquent des intégrations par parties et sont hors-programme. Ils peuvent néanmoins faire l'objets de calculs de dérivées pour les obtenir.

Muni des propriétés des lois exponentielles - fonction de répartition, fonction de survie, espérance, variance – les élèves peuvent résoudre les problèmes de durée de vie d'éléments radioactifs ou de composants susceptibles d'être modélisés par ces lois.

Liens entre loi exponentielle et loi géométrique :

Il peut être intéressant de prolonger les connaissances acquises par la mise en valeur du lien intrinsèque existant entre la loi exponentielle et la loi géométrique.

Exercice :

Soit X une variable aléatoire réel positive qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, on considère la variable aléatoire Y définie comme valeur entière de X+1. On note Y =[X+1].

1) *Calculer $P(Y = k)$ en fonction de k et λ*
2) *Exprimer la loi de probabilité de Y sous la forme $p((1-p)^{k-1}$ et en déduire que Y suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.*

Si X est définie sur [0, +∞[, alors Y est un entier strictement positif et :

$$P(Y = k) = P(k \leq X + 1 < k + 1) = P(k - 1 \leq X < k)$$

$P(Y = k) = \int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = [-e^{-\lambda x}]_{k-1}^{k}$

$P(Y = k) = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k}$

$P(Y = k) = e^{-\lambda(k-1)}[1 - e^{-\lambda k+\lambda(k-1)}]$

$P(Y = k) = e^{-\lambda}[1 - e^{-\lambda}]$ (1)

On peut donc écrire Y sous la forme $p((1-p)^{k-1}$ en posant $p = 1 - e^{-\lambda}$;

On retrouve alors :

$(1-p)^{k-1} = (1-(1-e^{-\lambda}))^{k-1} = (e^{-\lambda})^{k-1} = e^{-\lambda(k-1)}$

Et l'expression (1) définit bien une loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-\lambda}$

Réciproquement une loi exponentielle peut être définie comme la limite d'une loi géométrique (un exemple est traité dans les applications).

Lois sans mémoire :

	LOI GEOMETRIQUE	**LOI EXPONENTIELLE**
VARIABLE ALEATOIRE	Discrète sur $\mathbb{N}^*$	Réelle
LOI DE PROBABILITE	$P(X = i) = p(1-p)^{i-1}$	Densité : $\begin{cases} f(x) = 0 \; si \; x < 0 \\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \; pour \; x \geq 0 \end{cases}$ Fonction de répartition : $F(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-\lambda x}$ Fonction de survie : $G(x) = e^{-\lambda x}$
ESPERANCE	E(X) = $\frac{1}{p}$	E(X) = $\frac{1}{\lambda}$
VARIANCE	V(X) = $\frac{1-p}{p^2}$	V(X) = $\frac{1}{\lambda^2}$

B) LES APPLICATIONS

Durée de vie d'un noyau radioactif

L'espérance de vie d'un individu – ou encore sa durée de vie moyenne - est calculée à partir d'une population d'individus. Il s'agit donc d'une mesure statistique. On peut définir de la même façon la durée de vie moyenne d'un noyau radioactif jusqu'à sa désintégration.
La désintégration radioactive étant un phénomène aléatoire, on s'appuie sur les observations expérimentales pour proposer une modélisation mathématique de la réalité physique. Les observations nous enseignent que tous les noyaux radioactifs sont instables et se désintègrent. Ce phénomène aléatoire, spontané, inévitable est indépendant des paramètres extérieurs. On considère alors que la probabilité de désintégration d'un noyau dans un intervalle de temps donné est constante et ne dépend que de la nature de l'isotope étudié.

Ainsi, le nombre d’atomes d’un isotope radioactif qui se désintègrent naturellement pendant une certaine durée ne dépend donc que du nombre d’atomes initial. La « vitesse de désintégration » d'un corps radioactif, c'est-à-dire le nombre d’atomes qui se désintègrent pendant une seconde, est proportionnelle au nombre d’atomes N(t) présents à l’instant t.

La modélisation mathématique des expériences physiques conduit alors à cette équation différentielle simple :

$N'^{(t)} = \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$ où λ est un réel positif caractéristique de l’isotope.

En intégrant :

$\frac{N\prime(t)}{N(t)} = -\lambda$ d’où $Ln\big(N(t)\big) = -\lambda t + C \ (C \in \mathbb{R})$

Soit $N(t) = e^{-\lambda t+C} = e^{C} \times e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\lambda t}$ avec $N_0 = e^{C}$ réel positif. On notera que $N_0 = N(0)$ soit le nombre d’atomes initial.

Dans ce cadre mathématique, on peut définir la variable aléatoire T correspondant à la durée de vie d’un atome. La probabilité qu’un atome ne soit pas désintégré pendant la période [0 ; t] est donnée par :

$$P(T < t) = \frac{N_0 - N(t)}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t}$$

On retrouve la loi exponentielle de paramètre λ et ses propriétés permettent d’en déduire la durée de vie moyenne de l’atome donnée par l’espérance de T c’est-à-dire $\frac{1}{\lambda}$.

On définit également la période radioactive ou la demi vie de l’isotope comme étant la durée correspondant à la désintégration de la moitié des isotopes présents au départ. C’est aussi la durée [0 ;τ] où la probabilité que l’atome est présent est de 0,5 ou encore le moment τ médian de la loi de probabilité de T :

$$P(T < \tau) = P(T > \tau) = 0{,}5$$

Ce qui donne, quelle que soit l’équation retenue : $e^{-\lambda\tau} = 0{,}5$

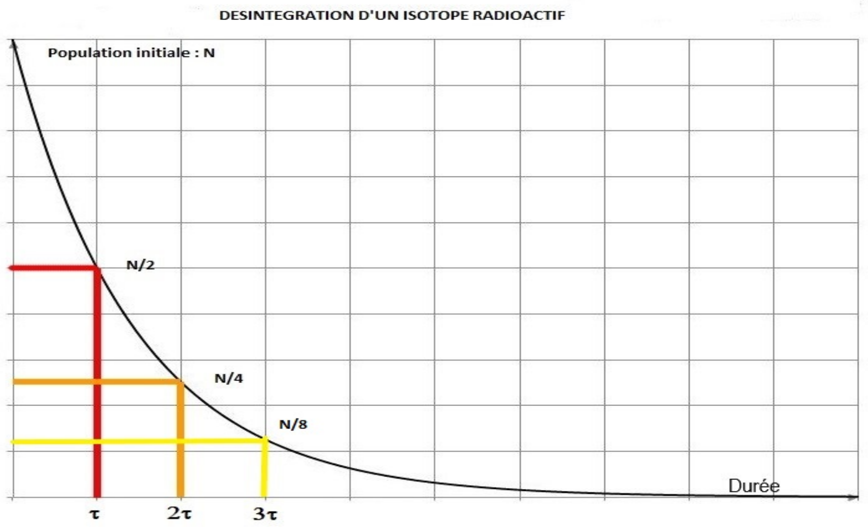
Et $-\lambda\tau = Ln(0{,}5) = -Ln2$

Soit $\tau = \frac{Ln2}{\lambda}$

La fonction de survie de l’élément radioactif est donnée par S(t) = $P(T > t) = e^{-\lambda t}$

On remarque : $P(T > n\tau) = e^{-\lambda n\tau} = (e^{-\lambda\tau})^n = (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^n}$

Autrement dit, tous les intervalles de temps τ, la probabilité de survie de l’isotope radioactif est divisée par 2.



Exercice :

On étudie un élément radioactif dont la durée de vie (en années) est modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ. λ est aussi appelé constante de désintégration de l'élément radioactif.

On constate par d'ancien relevé que 5% des noyaux de cet élément se désintègre en 100 ans.

1) *En déduire une valeur de λ à 10^{-4} près. Quelle est la période radioactive de cet élément ? Quelle est sa durée de vie moyenne ?*
2) *Quelle est la probabilité qu'un élément soir toujours actif au bout de 500 ans ? Si cet élément ne s'est pas désintégré au bout de 400 ans, quelle est la probabilité qu'il soit encore actif 100 ans ?*

1) On peut aborder cette question par plusieurs raisonnements :
- Le nombre d'élément a diminué de 5% donc la fonction de survie est de 95% = 0,95 au bout de 100 ans
- La probabilité d'avoir une durée de vie inférieur à 100 ans est de 0,05

Le calcul revient à chercher λ tel que $e^{-100\lambda} = 0{,}95$ soit $\lambda = -\frac{Ln(0{,}95)}{100} = 0{,}0005$

La période radioactive ou demi-vie est donnée par $\tau = \frac{Ln2}{\lambda} = 1386$ ans et sa durée de vie moyenne par $\frac{1}{\lambda} = 2000$ ans.

2) On calcule $P(T > 500) = \ e^{-500\lambda} = 0{,}779$.
La question suivante ne demande pas de calcul : la loi exponentielle est sans mémoire et donc

$P(X > 500\ /X > 400) = P(X > 100) = 0{,}95$ d'après les données de l'énoncé.

C) Temps discret et temps continu : les processus de Poisson

La problématique des passages entre le domaine discret et le domaine continu est au cœur des nouveaux programmes de mathématiques. La variable temps est souvent l'objet d'un passage dans l'un ou l'autre de ces domaines. Le temps peut être effectivement modélisé par un entier ou par un réel selon qu'on s'intéresse à des instants ou à une durée.

On pourrait ramener cette démarche aux « passages » entre le Δt et le dt :

Δt est un intervalle d'amplitude non nulle (mais très petite...) et on peut ainsi partitionner un intervalle compact réel I par un ensemble dénombrable de Δt. Même si cet ensemble est infini, on reste dans le modèle discret. C'est le domaine d'application des suites et des calculs approchés.

dt est un infinitésimal : sans amplitude et non dénombrable sur un intervalle. Nous sommes dans le domaine des fonctions réelles (que nous prendrons définies sur un intervalle compact, continues et dérivables par commodité par la suite). Ces fonctions peuvent être explicites ou solutions d'une équation différentielle.

<u>Passages discret/continu – exemples :</u>

Ainsi dans les études d'évolution de population, il est souvent fait appel aux suites récurrentes (variable entière) ou aux équations différentielles (variable réelle).

Soit une suite (u_n), définie par une fonction de récurrence, et qui est également une fonction du temps (on se place dans le cas simple où les fonctions sont de classe C1 et dans le cas d'une faible variation du temps entre 2 termes consécutifs de la suite) :

Rang	n	$n+1$
Suite	$u_n = u(t)$	$u_{n+1}=f(u_n) = u(t+\Delta t)$
Temps	t	$t+\Delta t$

Alors : $u_{n+1} - u_n = u(t+\Delta t) - u(t)$

$u_{n+1} - u_n = u(t) + K(t) \times \Delta t + \Delta t \times o(\Delta t) - u(t)$; $K(t)$ étant une fonction dépendant de $u(t)$ et des conditions initiales.

$\frac{u_{n+1}-u_n}{\Delta t} = K(t) + o(\Delta t)$

Soit $\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t} = K(t) + o(\Delta t)$ (e)

Et en passant à la limite (quand Δt « devient » dt...)

$u'(t) = K(t)$

La solution de cette équation différentielle permet alors de définir une fonction réelle continue.

<u>Exemple :</u>

Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = 1{,}01u_n$

On a alors $\frac{u_{n+1}-u_n}{\Delta t} = K(t) + o(\Delta t)$ = $0{,}1u_n = 0{,}1u(t)$ d'après (e) et on obtient l'équation différentielle :

$$u'(t) = 0{,}1u(t)$$

Dont la solution est de la forme $u(t) = u_0 e^{0{,}1t}$

On ne sera pas surpris de retrouver le couple suite géométrique/fonction exponentielle dans ce passage discret/continu.

On notera également que les lycéens ont utilisé le passage du discret au continu lors de la construction de la fonction exponentielle en première : les propriétés de calculs de a^k où k est rationnel sont étendues à l'exponentielle a^x où x est réel. On passe alors de l'ensemble des rationnels, ensemble dénombrable équipotent à N, aux réels grâce à la densité de Q dans R.

Un autre exemple de passage discret/continu, bien connu et rencontré au lycée, est celui de l'approximation de la loi binomiale par la loi normale dans le champs d'application du théorème de Moivre-Laplace.

Passages continu/discret

Un passage du continu au discret a déjà été rencontré lors de la discrétisation de la loi exponentielle en loi géométrique en utilisant la fonction partie entière (on peut d'ailleurs généraliser cette méthode avec des fonctions en escaliers de type $x \to [ax + b]$) .

La discrétisation de fonction continues est régulièrement mise en œuvre dans les calculs approchés d'intégrales et de calculs d'aires (méthode des rectangles ou des trapèzes) et également dans la résolution approchée d'équations différentielles par la méthode d'Euler...

Les exemples ne manquent pas. On retrouve toutes les méthodes itératives de résolutions d'équations que des algorithmes rendent opérationnels grâce aux puissances de calcul des ordinateurs.

On peut dresser, de façon non exhaustif, un tableau récapitulatif « miroir » des 2 domaines

Discret	***Continu***
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$	$\mathbb{R}, \mathbb{C}$
$\Delta t, \sum$	$dt, \int$
Suites, récurrences	Fonctions, équations différentielles
Lois discrètes, loi binomiale	Lois à densité, Loi normale
Loi géométrique, loi de Poisson	Loi exponentielle
...	...

Le thème d'étude des temps d'attente offre l'opportunité de s'intéresser à un schéma de Bernoulli un peu particulière qui articule les 2 modélisations, discrète et continue, du temps : le processus de Poisson.

Processus de Poisson

Exemple :

Un commerçant a compté qu'il recevait en moyenne 8 courriels en une matinée de 4 heures. Ceux-ci peuvent arriver à tout moment pendant la matinée, jamais en même temps et indépendamment les uns des autres.

A partir de cette situation, plusieurs questions peuvent être posées :

- a) Quelle est la probabilité de recevoir 5 courriels dans l'heure qui vient
- b) Quelle est la probabilité de n'avoir aucun courriel pendant plus d'une heure ?
- c) Quelle est la probabilité que le premier courriel arrive dans les 10 premières minutes ?

A chacune de ces questions, une loi de probabilité différente est sollicitée.

a)

On peut considérer qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli : il y a répétition indépendante et successive d'un évènement (l'arrivée d'un courriel). Dans ce cas, nous pourrions appliquer légitimement une loi binomiale à la variable aléatoire « nombre de courriels arrivés ».

Le problème est que nous n'avons ni le nombre de répétitions de l'expérience « envoi du courriel » (on assimile sa non-arrivée à un échec de l'envoi) ni la probabilité de cet envoi (qu'il faudrait définir sur un laps de temps= un Δt).

Nous n'avons qu'une donnée : l'espérance mathématique de la variable « nombre de courriels arrivés » : à savoir 8 courriels en 4h ou 2 courriels par heure. Là encore cette espérance dépend de la durée d'expérience choisie : Esp(« nombre de courriels en 4 heures) = 8 mais Esp(« nombre de courriels en une heure »)=2.

Par contre nous savons que cette espérance est égale à np de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et nous savons également que, de façon calculatoire, pour n grand et p petit et np < 10, cette même loi peut être approximée par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$. (Nous sommes tout à fait dans ces conditions car, si on pose un Δt égal à une minute, on a un envoi possible de courriel à chacune des 240 minutes (donc n=240) et une probabilité de recevoir un courriel à une minute précise égale à 8/240.)

Nous avons ainsi la réponse à la première question : Posons X la variable aléatoire du nombre de courriels reçu pendant la prochaine heure. X suit alors la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$ et nous calculons simplement :

$$p(X = 5) = \frac{e^{-2}(2^5)}{5!} \approx 0.036$$

La probabilité de recevoir 5 courriels dans l'heure qui vient n'est que de 3,6%. Nous n'avons pas eu besoin de discrétiser le temps bien que nous ayons utilisé une loi discrète.

b)

Les espacements entre 2 arrivées de courriels sont des variables continues, indépendantes les unes des autres et indépendantes du début de l'expérience. Ce sont des variables aléatoires qui suivent une loi de probabilité identique et sans mémoire. La probabilité d'obtenir un courriel durant une période T est proportionnelle à l'amplitude de cette période.

Courriels	0		1	2	3			4		5	6	
Temps	0		t1	t2	t3			t4		t5	t6	

La variable aléatoire Ti qui donne le temps d'attente entre le ième courriel et le (i+1)ème courriel suit donc une loi exponentielle.

L'espérance de cette loi est donnée par 4 heures/8 courriels = 0,5 heure entre 2 courriels et le paramètre de la loi exponentielle par l'inverse de l'espérance soit 2.

On notera qu'il s'agit du même paramètre que la loi de Poisson comptant les courriels alors que celle-ci a un paramètre égal à son espérance (mais nous avons inversé les variables).

La probabilité d'attendre plus d'une heure entre 2 courriels est donc donnée par la fonction de survie de la loi exponentielle de paramètre 2.

$P(Ti > 1) = e^{-2\times 1} = e^{-2} \approx 0{,}135$

Le temps est une variable continue et la variable Ti suit une loi à densité, loi exponentielle en l'occurrence.

c)

Si la question était de savoir la probabilité d'attendre moins de 10 minutes sans courriel, nous calculerions avec l'aide de la loi exponentielle :

$P(Ti < 1/6) = 1 - e^{-2\times\frac{1}{6}} \approx 0{,}2835$ (10 minutes sur une heure = 1/6)

Mais l'énoncé nous invite à distinguer les instants et les tirages (l'ordre des courriels). Il nous faudrait donc utiliser une loi géométrique, ce qui n'est pas possible sans une probabilité définie sur un Δt, c'est-à-dire sans discrétiser cet intervalle de temps de 4h.

Pour cela, prenons $\Delta t = 1$ minutes et supposons qu'un seul courriel peut arriver chaque minute. Sur 4 heures, cela fait 240 expériences possibles pour une probabilité de 8/240.

Un tableau Excel des 10 premiers termes de $p(1-p)^k$ pour 0$\leq k \leq 9$ et la somme de ces termes donnent :

1	0,03333333
2	0,03222222
3	0,03114815
4	0,03010988
5	0,02910621
6	0,02813601
7	0,02719814
8	0,02629154
9	0,02541515
10	0,02456798

Et $P\left(T1 \leq \frac{1}{6}\right) \approx 0{,}2875$

Si nous choisissons un Δt encore plus petit (30 secondes), nous calculons sur 480 expériences avec une probabilité de 8/480 de recevoir un courriel pendant une demi-minute précise.

On obtient alors $P\left(T1 \leq \frac{1}{6}\right) \approx 0{,}2855$ en additionnant les 20 premiers termes de la suite

On se rapproche de la valeur donnée par la loi exponentielle. En fait, qu'il s'agisse du premier courriel ou des 10 premières minutes n'impacte pas les résultats obtenus : nous sommes sur des expériences sans mémoire. Malgré l'insistance de l'énoncé à particulariser les tirages, la discrétisation du temps et l'utilisation de la loi géométrique sont inutiles.

[Que la somme de la loi géométrique débouche sur la loi exponentielle se démontre aisément :

On a 8 occurrences pour une période T partitionnée en $n\Delta t$, on travaille sur les 10 premières minutes soit T/24=$\frac{n}{24}$

Il faut donc additionner les $\frac{n}{24}$ premiers termes de la suite géométrique

$S_{\frac{n}{24}} = p + pq + pq^2 + \cdots + pq^{\frac{n-1}{24}} = p\frac{1-q^{\frac{n}{24}}}{1-q} = 1 - q^{\frac{n}{24}} = 1 - (1-p)^{\frac{n}{24}}$

Avec $p = 1 - q = \frac{8}{n}$

Plus Δt est petit, plus n est grand, meilleure sont la discrétisation et l'approximation.

Rappelons que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

On a alors : $(1-p)^{\frac{n}{24}} = (1-\frac{8}{n})^{\frac{n}{24}} = [\left(1-\frac{8}{n}\right)^n]^{\frac{1}{24}}$

Quand n tend vers $+\infty$, Δt tend vers 0 et $S_{\frac{n}{24}}$ tend vers 1 – $[e^{-8}]^{1/24}$=$1 - e^{-1/3}$;

Ce que la loi exponentielle donnait directement...]

Cette situation d'exercices relève d'un processus de Poisson qui se caractérise par :

- Les mêmes conditions qu'un schéma de Bernoulli : indépendance des tirages et un évènement qui n'a que 2 issues (se réaliser ou pas) dont la probabilité est constante.
- Pas de tirages simultanés (ou d'une probabilité considérée comme nulle).
- La loi de probabilité reste la même entre 2 tirages
- Le nombre de tirages suit une loi de Poisson

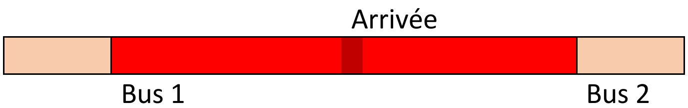
En ce cas, les durées entre 2 tirages sont indépendantes les unes des autres et suivent une loi exponentielle de même paramètre que la loi de Poisson.

Ces processus servent à modéliser les phénomènes de files d'attentes, de pannes ou d'évènement qui survient successivement, aléatoirement, et assez rarement pendant une période définie.

<u>Exemple d'application : le paradoxe de l'autobus (ou de l'inspection)</u>

Une ligne de bus annonce un transport en moyenne toutes les demi-heures mais ne s'engage pas sur les horaires exacts, aléatoires et imprévisibles selon la circulation, le chauffeur, la météo etc.

Vous vous présentez chaque jour de façon impromptue à l'arrêt de bus : vous pensez avoir en moyenne autant de temps à attendre le prochain bus que le précédent est parti.



Le temps d'attente moyen entre 2 bus étant de 30 minutes, vous estimez devoir attendre en moyenne 15 minutes. Ce n'est malheureusement pas ce que vous expérimenterez...

Heureusement, le processus de Poisson vous permettra de modéliser votre situation et de comprendre que vous attendrez souvent plus longtemps que 15 minutes.

Si nous assimilons l'intervalle de temps entre 2 bus à une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1/0,5 = 2 (nous prenons l'heure comme unité) alors :

La probabilité d'attendre plus de 15 minutes est de :

$$P\left(t > \frac{1}{4}\right) = e^{-2\times 1/4} \approx 0{,}606$$

Soit 60% de chance d'attendre plus que 15 minutes.

Les probabilités d'attendre plus de 30 minutes ou encore plus d'heure soit respectivement 0,367 et 0,135 vous aideront à prendre votre mal en patience...

<u>En conclusion :</u>

On pourrait schématiser selon la modélisation du temps utilisée l'outil mathématique le plus adapté à la situation rencontrée.

TEMPS	LOIS DE PROBABILITE		
Discret	Schéma de Bernoulli "classique"	Loi binomiale	$B(n,p)$
	(p pas trop petit, n pas trop grand)	Loi géométrique	$G(p)$
	Processus de Poisson	Loi de Poisson	$P(np)$
	(p proche de 0 ou inconnu, espérance connue)		
	Intervalles de temps, durée	Lois exponentielles	
Continu		Lois uniformes, lois à densité	