Propositions de sujets différenciés en Terminale Scientifique

Pistes de travail sur une suggestion de M. Arzoumanian,
Inspecteur Pédagogique Régional de Mathématique de l'académie de Limoges

Lycée Jean-Baptiste Darnet

S[t] Yrieix-la-Perche

8 mai 2018

Table des matières

I. Avertissement

Les sujets proposés ci-après sont inspirés par l'exercice nº 4 du baccalauréat S Métropole-Réunion de juin 2017 [1]. Ils concernent une étude épidémiologique vue sous l'angle des probabilités et des suites numériques. La calculatrice est indispensable. S'ils sont abordés dans le cadre de travaux pratiques, ces sujets peuvent également être traités au moyen de logiciels tableur.

Ces propositions n'ont, à ce jour, pas été testées avec les élèves.

1. https://www.apmep.fr/Annee-2017-14-sujets-14-corriges

II. Sujet « à prise d'initiative »

1. Compétences

	A1	A2	A3	B1	B2	B3a	B3b	B4
Chercher				X	X			
Modéliser	X					X		
Représenter	X				X			
Calculer		X	X		X	X	X	
Raisonner		X	X	X		X		X
Communiquer				X	X		X	X

2. Énoncé

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

— Soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;

— Soit malade (atteint par le virus) ;

— Soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a été guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

1. Parmi les individus de type S d'une semaine n, on observe que la semaine suivante, 85% restent de type S, 5% deviennent malades et que les autres deviennent immunisés ;
2. Parmi les individus malades en semaine n, on observe que la semaine suivante, 65% restent malades et que les autres sont guéris et deviennent immunisés.
3. Tout individu immunisé une semaine n reste immunisé les semaines suivantes.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :

— S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;

— M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;

— I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 \quad ; \quad P(M_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie depuis la semaine 0 et au cours des semaines 1 et 2.

1. Construire et compléter un arbre pondéré représentant l'évolution de l'épidémie sur les trois premières semaines.
2. Calculer $P(I_2)$.
3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

Partie B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.

Pour tout entier naturel n, on note : $u_n = P(S_n)$, $v_n = P(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des événements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel , on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.
   Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.
2. On admet que les termes de la suite (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N, appelé « pic épidémique ». N est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
   Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.
3. a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison.
   En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,
$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right).$$
4. Que peut-on en dire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

3. Indicateurs de réussite

	Indicateurs	TS	S	F	I
Chercher	B1, B2	$2/2$	$1/2$	$1/2$	$0/2$
Modéliser	A1, B3a		$2/2$	$1/2$	$0/2$
Représenter	A1, B2		$2/2$	$1/2$	$0/2$
Calculer	A1, A3, B2, B3a, B3b	$\geq 4/5$	$3/5$	$2/5$	$\leq 1/5$
Raisonner	A2, A3, B1, B3a, B4	$\geq 4/5$	$3/5$	$2/5$	$\leq 1/5$
Communiquer	B1, B2, B3b, B4	$4/4$	$3/4$	$2/4$	$\leq 1/4$

« TS » : *Très satisfaisant* « S » : *Satisfaisant* « F » : *Fragile* « I » : *Insuffisant*

III. Sujets « différenciés »

1. Sujet « différencié » niveau 1

a. Compétences

	A1	A2	A3	B1	B2a	B2b	B3a	B3b	B3c	B4a	B4b
Chercher	X					X					
Modéliser								X			
Représenter											
Calculer		X	X		X						
Raisonner			X	X		X	X	X	X	X	X
Communiquer			X	X				X		X	X

b. Énoncé

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

— Soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;

— Soit malade (atteint par le virus) ;

— Soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a été guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

1. Parmi les individus de type S d'une semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$, 85% restent de type S, 5% deviennent malades et 10% deviennent immunisés ;
2. Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$, 65% restent malades et 35% sont guéris et deviennent immunisés.
3. Tout individu immunisé une semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :

— S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;

— M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;

— I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

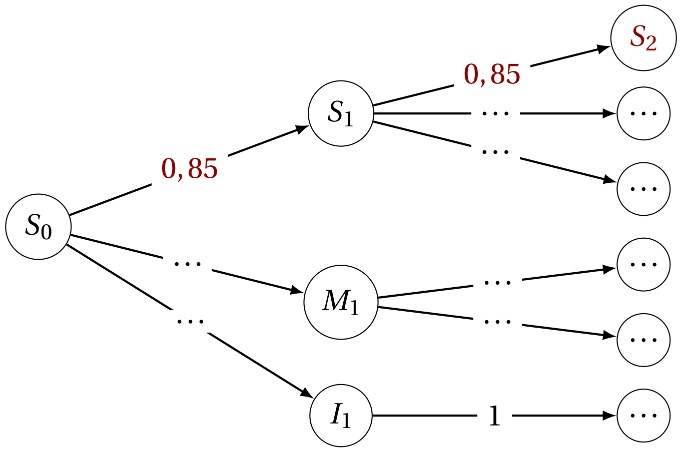
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 \quad ; \quad P(M_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Compléter l'arbre pondéré représentant l'évolution de l'épidémie sur les semaines 1 et 2.



2. En envisageant les trois cas qui conduisent à l'évènement I_2, montrer que $P(I_2) = 0,2025$.
3. Démontrer que $P_{I_2}(M_1) \approx 8,6\%$.
   Quelle est la signification de cette probabilité ?

Partie B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.

Pour tout entier naturel n, on note : $u_n = P(S_n)$, $v_n = P(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des événements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel , on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.
2. On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$.
   À l'aide d'un tableur, on calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	$0,8500$	$0,0500$	$0,1000$
4	2	$0,7225$	$0,0750$	$0,2025$
5	3	$0,6141$	$0,0849$	$0,301$
6	4	$0,5220$	$0,0859$	$0,3921$
7	5	$0,4437$	$\ldots$	$\ldots$

On donne la formule saisie dans la cellule C3 qui permet, par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) :

`=0,65*C2+0,05*B2.`

   a. Calculer le contenu des cellules de la ligne 7.

b. On admet que les termes de la suite (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N, appelé « pic épidémique ». N est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande. Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

3. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0,85u_n$.

b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser son premier terme et sa raison.

c. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4. On admet que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right).$$

a. Justifier les limites de chacune des suites :

— $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = 0$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = 0$;

— $\lim\limits_{n\to+\infty} (w_n) = 1$.

b. Que peut-on déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

c. Indicateurs de réussite du niveau 1

	Indicateurs	TS	S	F	I
Chercher	A1, B2b	$2/2$	$1/2$	$1/2$	$0/2$
Modéliser	B3b		$1/1$	$0/1$	
Représenter					
Calculer	A2, A3, B2a	$\geq 4/5$	$3/5$	$2/5$	$\leq 1/5$
Raisonner	A3, B1, B2b, B3 à B4	$\geq 7/8$	$6/8$	4 à $5/8$	$\leq 3/8$
Communiquer	A3, B1, B3b, B4a, B4b	$5/5$	$\geq 3/5$	$2/5$	$\leq 1/5$

« TS » : *Très satisfaisant* « S » : *Satisfaisant* « F » : *Fragile* « I » : *Insuffisant*

2. Sujet « différencié » niveau 2

a. Compétences

	A1	A2	A3	B1	B2a	B2b	B2c	B3a	B3b	B4a	B4b
Chercher	X						X				
Modéliser					X						
Représenter											
Calculer		X	X			X				X	
Raisonner			X	X	X		X	X	X		X
Communiquer								X			X

b. Énoncé

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

— Soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;

— Soit malade (atteint par le virus) ;

— Soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a été guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

1. Parmi les individus de type S d'une semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$, 85% restent de type S, 5% deviennent malades et 10% deviennent immunisés ;
2. Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$, 65% restent malades et 35% sont guéris et deviennent immunisés.
3. Tout individu immunisé une semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :

— S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;

— M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;

— I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

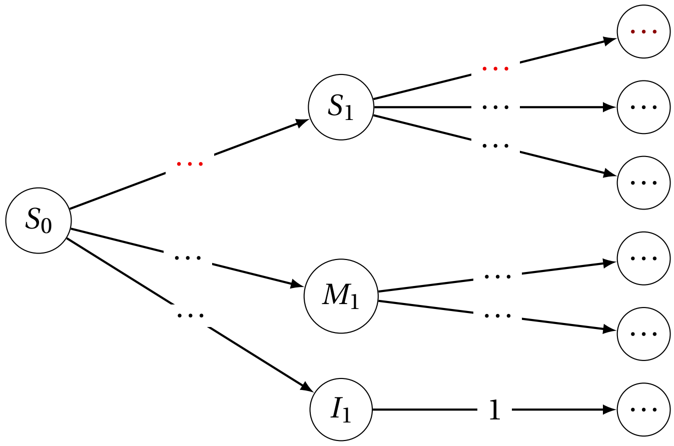
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 \quad ; \quad P(M_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Compléter l'arbre pondéré représentant l'évolution de l'épidémie sur les semaines 1 et 2.



2. Montrer que $P(I_2) = 0,2025$.
3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

Partie B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.

Pour tout entier naturel n, on note : $u_n = P(S_n)$, $v_n = P(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des événements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel , on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.
2. On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$.
   À l'aide d'un tableur, on calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	$0,8500$	$0,0500$	$0,1000$
4	2	$0,7225$	...	$0,2025$
5	3	$0,6141$	...	$0,301$
6	4	$0,5220$	...	$0,3921$
7	5	$0,4437$	...	$0,4744$
8	6	$0,3771$	$0,0754$	$0,5474$
...		...	...	...
20	19	$0,0536$	$0,0133$	$0,9330$
21	20	$0,0456$	$0,0113$	$0,9431$
22	21	$0,0388$	$0,0096$	$0,9516$

a. Parmi les formules suivantes, laquelle, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

`=0,65*C2+0,05*B2`   `=0,65*C3+0,05*B3`   `=0,65*Un+0,05*Vn`

b. Compléter les cellules C4, C5, C6 et C7 du tableau ci-dessus.

c. On admet que les termes de la suite (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N, appelé « pic épidémique ». N est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande. Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

3. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0,85u_n$.

b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4. On admet que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right).$$

a. Calculer les limites de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

b. Que peut-on déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

c. Indicateurs de réussite pour le niveau 2

	Indicateurs	TS	S	F	I
Chercher	A1, B2c	$2/2$	$1/2$	$1/2$	$0/2$
Modéliser	B2a		$1/1$	$0/1$	
Représenter					
Calculer	A2, A3, B2b, B4a	$4/4$	$3/4$	$2/4$	$\leq 1/4$
Raisonner	A3, B1, B2a, B2c, B3, B4b	$\geq 6/7$	$5/7$	3 à $4/7$	$\leq 2/7$
Communiquer	B3a, B4b		$2/2$	$1/2$	$0/2$

« TS » : *Très satisfaisant*   « S » : *Satisfaisant*   « F » : *Fragile*   « I » : *Insuffisant*

3. Sujet « différencié » niveau 3

a. Compétences

	A1	A2	A3	B1	B2	B3a	B3b	B4	B5
Chercher					X				
Modéliser	X					X			
Représenter	X								
Calculer	X	X	X		X				
Raisonner		X	X	X	X	X	X	X	X
Communiquer				X				X	X

b. Énoncé

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

— Soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;

— Soit malade (atteint par le virus) ;

— Soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a été guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

1. Parmi les individus de type S d'une semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$, 85% restent de type S, 5% deviennent malades et 10% deviennent immunisés ;
2. Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$, 65% restent malades et 35% sont guéris et deviennent immunisés.
3. Tout individu immunisé une semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :

— S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;

— M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;

— I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 \quad ; \quad P(M_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Représenter l'évolution de l'épidémie sur les semaines 1 et 2 sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Calculer $P(I_2)$.
3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

Partie B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.

Pour tout entier naturel n, on note : $u_n = P(S_n)$, $v_n = P(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des événements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel , on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.
2. On admet que la suite (v_n) est définie par

$$v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n.$$

   On admet que les termes de la suite (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N, appelé « pic épidémique ». N est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
   Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.
3. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison.

   b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right).$$

5. Que peut-on déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

c. Indicateurs de réussite pour le niveau 3

	Indicateurs	TS	S	F	I
Chercher	B2	$1/1$			
Modéliser	A1, B3a	$2/2$	$1/2$	$0/2$	
Représenter	A1 : 5 critères[2]	$5/5$	$4/5$	$3/5$	$\leq 2/5$
Calculer	A1, A2, A3, B2	$4/4$	$3/4$	$2/4$	$\leq 1/4$
Raisonner	A2, A3, B	$\geq 6/8$	$5/8$	3 à $4/8$	$\leq 2/8$
Communiquer	B1, B4, B5	$3/3$	$2/3$	$1/3$	$0/3$

« TS » : *Très satisfaisant* « S » : *Satisfaisant* « F » : *Fragile* « I » : *Insuffisant*

2. Soin, valeurs et placement des probabilités, respect du nommage et placement des événements