Une Histoire des Logarithmes

Stéphane Mirbel

Réforme du lycée 2019-2020

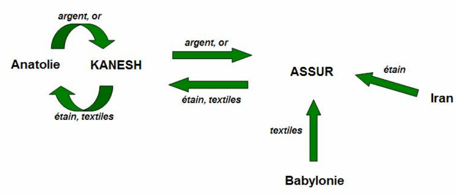
9-mars-2020

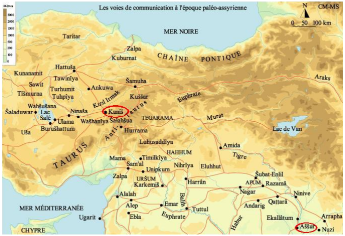
- Avant Napier
- Les travaux de Napier
- Après Napier
- Algorithmes (document annexe)

- **Avant Napier**
- Les travaux de Napier
- Après Napier

Logarithme avant Napier

À l'époque **des babyloniens** (II^e millénaire av.JC au VI ^{e} siècle av. J.-C.), on trouve des traces d'**un commerce riche et abondant**, ici un schéma pris sur Wikipédia donnant les circuits du commerce entre Assur et Kanesh :





Logarithme avant Naiper

Tablettes des archives des marchands assyriens exhumées à Kültepe

Lettre d'un marchand à un responsable de convoi.

Compte des recettes et dépenses d'un convoi.

Reçu pour un prêt en argent.

Compte-rendu de procès.

Logarithme avant Napier

Dès cette époque on souhaite répondre à la question :

Combien de temps faut-il pour doubler un capital C_0 rémunéré au taux $t = 20\% = 0,2$?
Soit résoudre l'équation $1,2^x = 2$.

Des tablettes de tables d'intérêts donnent les valeurs de :

- $(1;12)^3 < 2$ soit $\left(1+\dfrac{12}{60}\right)^3 < 2$
- $(1;12)^4 > 2$ soit $\left(1+\dfrac{12}{60}\right)^4 > 2$

Il semblerait que la méthode **d'interpolation** ait été utilisée par les babyloniens pour trouver le nombre $(3;47,13,20)$ soit le nombre $3+\dfrac{47}{60}+\dfrac{13}{60^2}+\dfrac{20}{60^3}$ solution du problème.
Aucun logarithme n'est utilisé.

Logarithme avant Napier

Plus tard, **Archimède** mathématicien, géomètre, physicien, (Syracuse, 287-212 av. J.-C.), pose le problème suivant : **combien de grains de sable sont contenus dans une sphère de grandeur notre univers ?**

Pour répondre à cette question, il manipule des grands nombres et il met en évidence la relation exponentielle fondamentale :

$$\boxed{n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, a > 0, a^{m+n} = a^m \times a^n}$$

Il obtient ce résultat sans la numération de position.

Logarithme avant Napier

Il faut attendre le XIII^e et XIV^e en Europe pour voir apparaître la **numération décimale** de position qui vient de l'Inde et de nouveaux travaux sur les nombres et notamment sur la relation

$$n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, a > 0, a^{m+n} = a^m \times a^n$$

Chuquet (Français 1445- 1488) et **Stiffel**(Allemand 1486 – 1567) pressentent des **relations entre progressions arithmétiques et géométriques** sans approfondir.

Logarithme avant Napier

Au XVI^e siècle, le développement de l'astronomie, la découverte des lois de Kepler (Allemand 1571-1630), la manipulation de très grands nombres complexifient les calculs fastidieux et très longs. Il est nécessaire de convertir des multiplications en additions, la méthode est appelé **prostaphérèse** :

$$\boxed{\cos(a) \times \cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}}$$

- Avant Napier
- **Les travaux de Napier**
- Après Napier

Napier

Logarithme de Napier

Napier ou Neper théologien, mathématicien, physicien, astronome (Écossais, 1550 - 1671) édite deux traités :

- en 1614 : *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio*
- en 1619 (par son fils) : *Mirifici Logarithmorum canonis constructio*

Dans *descriptio* il explique la construction des tables de logarithme.

Définition :
Logarithmi sunt numeri qui proportionalibus adjuncti aequales servant differentias

Les logarithmes sont les nombres qui a des nombres proportionnels et ont des différences égales.

C'est Napier qui donne le nom logarithme qui signifie (en grec) nombre de raison :

- logos : raison, sous-entendu raison de progression arithmétique
- arithmos : nombre, quantité.

Soient des nombres proportionnels $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors

$$LOG(a) - LOG(b) = LOG(c) - LOG(d)$$

Les fonctions n'existent pas, la formulation précédente n'est pas évoquée.

Logarithme de Napier

"Très illustre amateur de mathématiques, comme rien n'est aussi pénible que la pratique des mathématiques, parce que la logistique est d'autant plus freinée, retardée que les multiplications, les divisions et les extractions des racines carrées ou cubiques portent sur de grands nombres ; qu'elle est soumise à l'ennui des longues opérations et beaucoup plus encore à l'incertitude des erreurs, j'ai entrepris de rechercher par quel procédé sûr et rapide on pourrait éloigner ces obstacles. Dans ce but, j'en ai examiné soigneusement une grande quantité, les uns après les autres, et enfin j'en ai trouvé plus d'un, clair et d'un emploi facile, dont je traiterai probablement ailleurs. À la vérité, aucun, parmi les autres, n'est plus utile que l'un d'eux ; par son moyen, on rejette les nombres utilisés dans les multiplications, les divisions et les extractions de racines lorsqu'elles sont difficiles et prolixes, et on les remplace par d'autres nombres, que j'ai pris soin de leur adjoindre, et l'on achève le calcul par des additions, des soustractions, des divisions par deux et par trois seulement...

Logarithme de Napier

...Est-il un mystère, qui, au milieu de tant d'autres, lui soit supérieur ? Il m'a plu de communiquer son usage au monde des mathématiciens. . . "

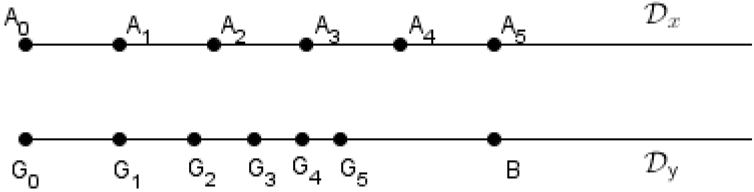
J. Napier

Le but de J.Napier était de construire des tables du sinus et du logarithme avec la propriété :

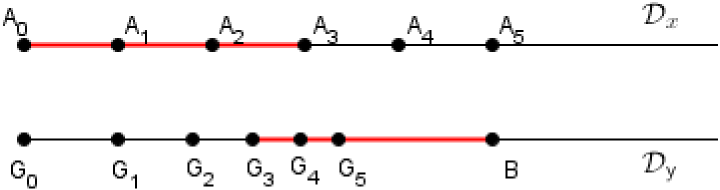
- $\log(a) = A$
- $\log(b) = B$
- $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.

angle	sinus	logarithme
α	a	A
β	b	B
	ab	$A+B$

- **Demi-droite** D_x : progression arithmétique telle que $L = A_0A_1 = A_1A_2 = ... = A_kA_{k+1}$
- **Demi-droite** D_y : progression géométrique telle que $G_0B = 1$, et pour $q \in]0;1[$, $q = G_1B = \dfrac{G_1B}{G_0B} = \dfrac{G_2B}{G_1B} = ... = \dfrac{G_{k+1}B}{G_kB}$.



On a alors : $\boxed{A_0A_k = kA_0A_1 = kL \text{ et } G_kB = q^k}$.

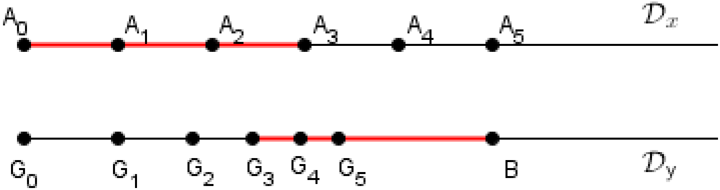


De la relation $A_0A_k = kA_0A_1 = kL$ et $G_kB = q^k$ on définit une fonction :

Définition du logarithme de Napier (sans l'écrire) :

$$\boxed{LOG(G_kB) = A_0A_k}$$

exemple : $LOG(q^3) = 3L$.



$$A_0A_k = kA_0A_1 = kL \text{ et } G_kB = q^k$$

$$\boxed{LOG(G_kB) = A_0A_k}$$

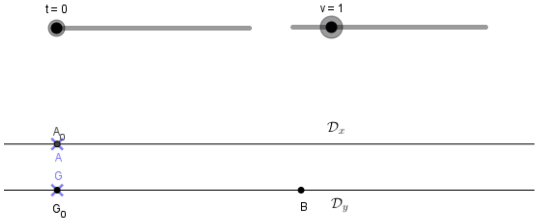
- $LOG(G_0B) = A_0A_0 \iff LOG(1) = 0$
- $LOG(G_1B) = LOG(q) = A_0A_1 = L$
- $LOG(G_kB) = A_0A_k$
  $LOG(q^k) = kA_0A_1 \iff LOG(q^k) = kLOG(q)$

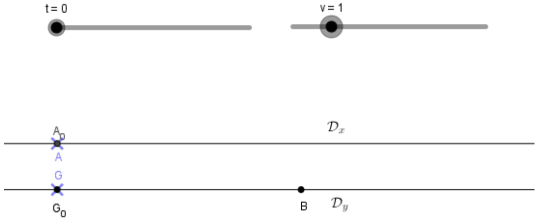
Remarque : ce logarithme est discret !

Logarithme de Napier

Napier utilise la **cinématique** pour expliquer **le phénomène continue du logarithme**, un mobile se déplace sur chacune des demi-droites $\mathcal{D}_x$ et $\mathcal{D}_y$ de la manière suivante :

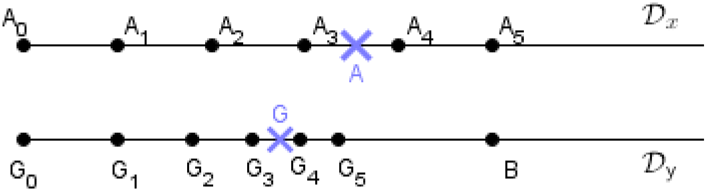
- Pour la progression arithmétique : le mouvement est uniforme, de A_0 vers A_1, la vitesse v est constante.
- Pour la progression géométrique :
  - À l'instant 0, en G_0 la vitesse est v.
  - À chaque instant, la vitesse du mobile est proportionnelle à la distance qui le sépare de B.





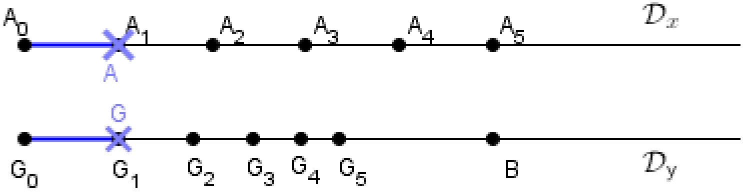
Napier affirme que **la distance parcourue par le premier point A à chaque instant est le logarithme de la distance que le deuxième G doit encore parcourir** : $LOG(GB) = A_0A$

Justification : On définit t_k le temps où le mobile A est en A_k, le mouvement uniforme du mobile A induit $t_k = kt_1$.
Le calcul différentiel n'existe pas, mais Napier va considérer que le temps t_1 du premier déplacement est suffisamment petit pour confondre la vitesse instantanée et la vitesse moyenne pendant t_1.



À l'instant t, la vitesse du mobile G est proportionnelle à la distance qu'il lui reste à parcourir, elle vaut $C.GB$. Au temps $t = 0$, $v = C.G_0B = C \times 1$ et le temps $t = 0$ donne $C = v$.

Justification : À l'instant t_1 :



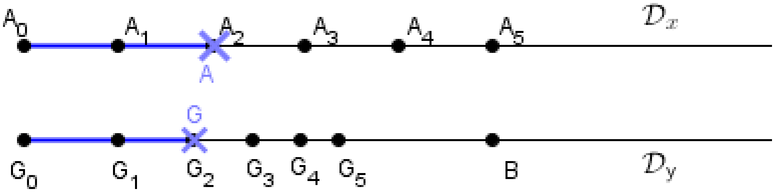
Les mobiles A et G sont animés de la même vitesse v à l'instant $t = 0$: $G_0G_1 = A_0A_1 = vt_1$

Au temps t_1 le mobile G est bien positionné en G_1.

De plus :

$$G_1B = 1 - G_0G_1 = 1 - vt_1 = G_1B = \frac{G_1B}{G_0B} = \frac{G_2B}{G_1B} = \frac{G_{k+1}B}{G_kB} = q$$

Justification : au temps $t_2 = 2t_1$:



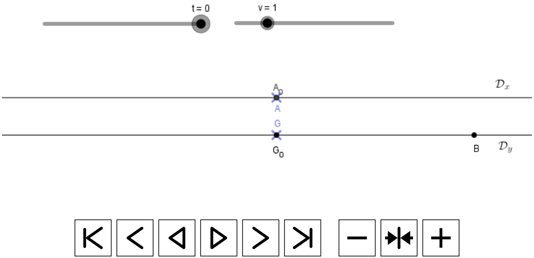
Entre les instants t_1 et t_2 la vitesse du mobile G est proportionnelle à la distance qu'il reste à parcourir : $\dfrac{G_1G}{t_2 - t_1} = \dfrac{G_1G}{t_1} = G_1B \times v$

$G_1G = G_1B - GB = G_1B.vt_1 \Longrightarrow \dfrac{GB}{G_1B} = 1 - vt_1 = \dfrac{G_2B}{G_1B}$

Ainsi $G = G_2$ à l'instant $2t_1$.

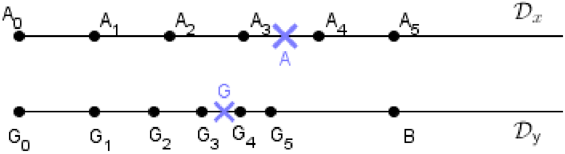
Idem pour $3t_1$, ... , kt_1, on a respectivement $G = G_3$,..., $G = G_k$.

Après avoir défini le logarithme sur $]0;1]$, Napier **Prolonge le logarithme sur** $]0;+\infty[$ en observant les positions des mobiles avant l'instant 0.



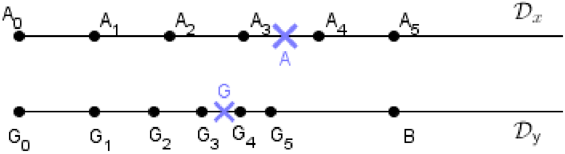
Le mobile A est plus rapide que le mobile G pour $t > 0$ et c'est le contraire si $t < 0$.

Pour **conclure** sur les travaux de Napier, on peut utiliser le **calcul différentiel** :



y est la distance G_0G (l'abscisse du point G) :
à l'instant t, le mobile G vérifie $GB = 1 - y$ (distance qu'il reste à parcourir) et $\dfrac{dy}{dt} = v.(1-y)$ (vitesse instantanée à l'instant).
Ainsi la fonction y de variable t vérifie l'équation différentielle (E):
$y' = v - vy \iff y' + vy = v$.
Une solution particulière de (E) est y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(t) = 1$.
Une solution générale de l'équation $y' + vy = 0$ est y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = Ke^{-vt}$.

Pour **conclure** sur les travaux de Napier, on peut utiliser le **calcul différentiel** :



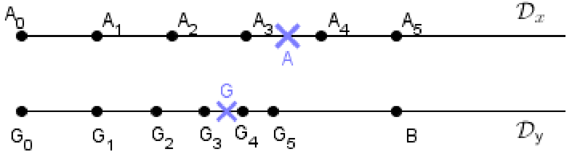
y est la distance G_0G (l'abscisse du point G) :
à l'instant t, le mobile G a pour abscisse $y(t) = 1 + Ke^{-vt}$.
Avec $y(0) = 0$ on a $K = -1$.
D'où $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{y(t) = 1 - e^{-vt}}$$

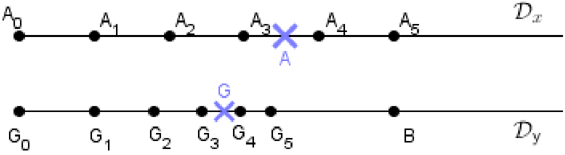
À l'instant t, $G_0G = 1 - e^{-vt}$ donc $GB = e^{-vt}$

À l'instant t, $G_0G = 1 - e^{-vt}$ donc $GB = e^{-vt}$

Vérifions qu'en t_k, $G = G_k$:
À l'instant t_k,
$GB = e^{-vt_k} = e^{-vkt_1} = (e^{-vt_1})^k = G_1B^k = q^k = G_kB$.
On a $G = G_k$.



Quelle est la **base du logarithme utilisé** ?



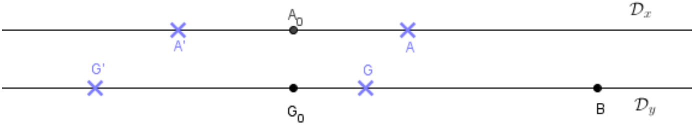
$LOG(GB) = A_0A \iff LOG\left(e^{-vt}\right) = v.t$
Soit β la base du logarithme utilisé, pour $t > 0$:

$$\frac{\ln\left(e^{-vt}\right)}{\ln \beta} = vt \iff \ln(\beta) = -1 \iff \beta = \frac{1}{e}$$

$$\boxed{\forall x \in]0;1], LOG(x) = \frac{\ln(x)}{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}}$$

$x = 1 - y = GB.$

Le mobile A est plus rapide que le mobile G pour $t > 0$ et c'est le contraire si $t < 0$.



Au voisinage d'un temps nul, on obtient au temps t et $-t$:
$G_0G < A_0A = A'A_0 < G'G_0$
On pose $G_0G = h$ (h est proche de 0), on obtient

$$G'G_0 = vG'Bt = G'B.G_0G = (1 + G'G_0)h \text{ donc } G'G_0 = \frac{h}{1-h}$$

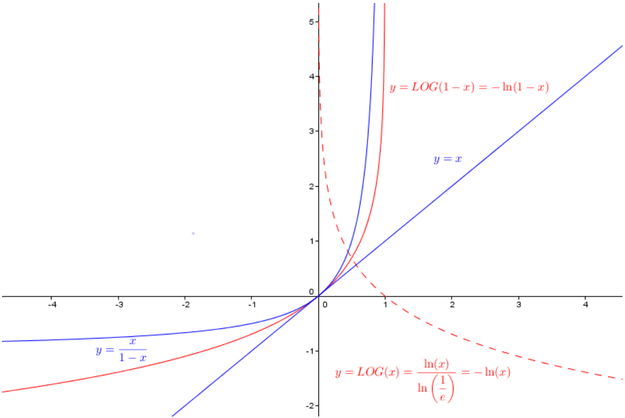
Ainsi J.Napier montre que pour $h > 0$ assez petit :

$$\boxed{h < LOG(1-h) < \frac{h}{1-h}}$$

Logarithme de Napier : tables

Pour $h > 0$ assez petit :

$$\boxed{h < LOG(1-h) < \frac{h}{1-h}}$$



Logarithme de Napier : tables

Napier $A = 0,9995$ proche de 1 et $A^{20} \simeq 0,99 = B$.
Multiplier un nombre x par A revient à faire

$$xA = x(1 - 5 \times 10^{-4}) = x - \frac{1}{2} \times \frac{x}{1000}$$

Multiplier un nombre x par B revient à faire

$$xB = x(1 - 10^{-2}) = x - \frac{x}{100}$$

Il calcule les logarithmes des nombres A et B :
il calcule d'abord une approximation du $LOG(1-10^{-7})$ en posant $h=10^{-7}$, on a : $10^{-7} < LOG(1-10^{-7}) < \dfrac{10^{-7}}{1-10^{-7}}$

$$\boxed{LOG(1-10^{-7}) \simeq \frac{1}{2}\left(10^{-7}+\frac{10^{-7}}{1-10^{-7}}\right) \simeq 1{,}000\,000\,05 \times 10^{-7}}$$

Logarithme de Napier : tables

nombre	logarithme
$(1-10^{-7})^{100} > 0{,}999\,99$	$100 \times 1{,}000\,000\,05 \times 10^{-7}$
$(1-10^{-7})^{101} < 0{,}999\,99$	$101 \times 1{,}000\,000\,05 \times 10^{-7}$

Par interpolation il déduit $LOG(0{,}999\,99) \simeq 100{,}000\,5 \times 10^{-7}$

nombre	logarithme
$(0{,}999\,99)^{50} > 0{,}999\,95$	$50 \times 1{,}000\,5 \times 10^{-7}$
$(0{,}999\,99)^{51} < 0{,}999\,95$	$51 \times 1{,}000\,5 \times 10^{-7}$

Par interpolation il déduit $LOG(A) = LOG(0{,}999\,5) \simeq 5\,001{,}25 \times 10^{-7}$

nombre	logarithme
$(0{,}999\,5)^{20} > 0{,}99$	$20 \times 5\,001{,}25 \times 10^{-7}$
$(0{,}999\,5)^{21} < 0{,}99$	$21 \times 5\,001{,}25 \times 10^{-7}$

Par interpolation il déduit $LOG(B) = LOG(0{,}99) \simeq 100\,503{,}4 \times 10^{-7}$

Logarithme de Napier : tables

$A = 0,9995$ et $LOG(A) \simeq a = 5\,001{,}25 \times 10^{-7}$
$B = 0,99$ et $LOG(B) \simeq b = 100\,503{,}4 \times 10^{-7}$

N	LOG	N	LOG	N	LOG		N	LOG
1	0	B	b	B^2	$2b$	...	B^{68}	$68b$
A	a	AB	$a+b$	AB^2	$a2+b$	...	AB^{68}	$a+68b$
A^2	$2a$	A^2B	$2a+b$	A^2B^2	$2a+2b$	...	A^2B^{68}	$2a+68b$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
A^{20}	$20a$	$A^{20}B$	$20a+b$	$A^{20}B^2$	$20a+2b$	...	$A^{20}B^{68}$	$20a+68b$

Sur Tableur, en séparant les deux tables (nombre et logarithme) on obtient

Nombre	1	2	68	69
0	10000000,000000	9900000,000000	5099857,462496	5048858,887871
1	9995000,000000	9895050,000000	5097307,533764	5046334,458427
2	9990002,500000	9890102,475000	5094758,879998	5043811,291198
19	9905426,291169	9806372,028257	5051626,219022	5001109,956832
20	9900473,578023	9801468,842243	5049100,405912	4998609,401853

LOG	1	2	68	69
0	0,000000	**100503,400000**	6733727,800000	6834231,200000
1	**5001,250417**	105504,650417	6738729,050417	6839232,450417
2	10002,500834	110505,900834	6743730,300834	6844233,700834
19	95023,757923	195527,157923	6828751,557923	6929254,957923
20	100025,008340	200528,408340	6833752,808340	6934256,208340

Pour Napier, G_0B n'est en fait pas égal à 1 mais à 10^7. En reprenant l'équation différentielle on a :
$y' = C(10^7 - y) \Longleftarrow y' + Cy = C10^7$ (C est une constante)
On trouve $y(t) = 10^7 - 10^7 e^{-Ct} = G_0G$.
$y'(t) = C10^7 e^{-Ct}$ et à l'instant $t = 0$ on a :
$y'(0) = x'(0) = C10^7$
d'où $x(t) = C10^7 t$ et $y = 10^7 - 10^7 e^{-\frac{x}{10^7}}$
$GB = z = 10^7 e^{-\frac{x}{10^7}}$ et $x = -10^7 \ln\left(\frac{z}{10^7}\right) = 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{z}\right)$
Ainsi $LOG(BG) = LOG(z) = 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{z}\right)$

Ainsi le logarithme de Napier est :

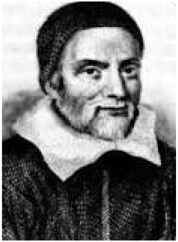
$$LOG(z) = 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{z}\right)$$

LOG	1	2	68	69
0	0,000000	**100503,400000**	6733727,800000	6834231,200000
1	**5001,250417**	105504,650417	6738729,050417	6839232,450417
2	10002,500834	110505,900834	6743730,300834	6844233,700834
19	95023,757923	195527,157923	6828751,557923	6929254,957923
20	100025,008340	200528,408340	6833752,808340	6934256,208340

$10^7 \ln(10^7/x)$	1	2	68	69
0	0,000000	100503,358535	6733725,021846	6834228,380381
1	5001,250417	105504,608952	6738726,272263	6839229,630798
2	10002,500834	110505,859369	6743727,522680	6844230,881215
19	95023,757920	195527,116455	6828748,779766	6929252,138301
20	100025,008336	200528,366871	6833750,030182	6934253,388717

Il obtient une précision à six chiffres, celle souhaitée.

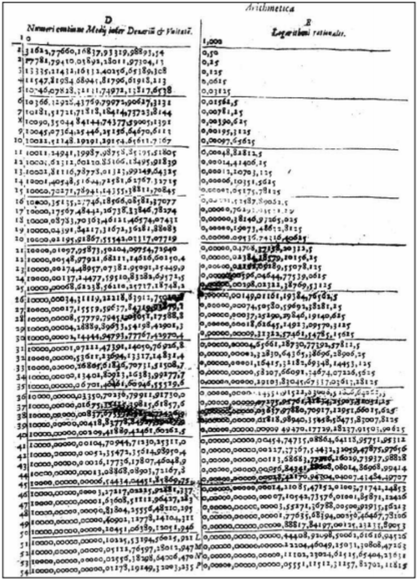
Henry Briggs (Anglais, 1561-1630), mathématicien, astronome, est enthousiaste de la lecture de *Descriptio* de Napier. Ils eurent ensemble de nombreuses rencontres et échanges et l'idée d'un système logarithmique germe, le logarithme de 1 serait égal à 0 et le logarithme de 10 serait égal à $100\,000\,000\,000\,000 = 10^{14}$. Briggs publiera *Arithmetica logarithmetica* dans lequel il donne ses tables de logarithmes avec 14 chiffres exacts. Puis Briggs travaillera sur le logarithme en base 10, à l'unité on associe 0 et à 10 on associe 1.



Ensuite Briggs construit sa table de la manière suivante :

Nombre	Logarithme
10	1
$\sqrt{10}$	$0,5$
$\sqrt{\sqrt{10}}$	$0,25$
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$	$0,25$
...	...
$10^{\frac{1}{2^{54}}} \simeq 1$	$\dfrac{1}{2^{54}}$

Logarithme de Napier, contribution de Briggs



Arithmetica logarithmica, Briggs, 1624, le calcul de $10^{1/2^{54}}$, BM Rennes.

Briggs donnera la valeur du logarithme de 2.
Pour se faire il remarque qu'il suffit de connaître le nombre de chiffres qui composent 2^n et prendre n très grand. En effet si le nombre de chiffres de 2^n est k on a :

$$10^{k-1} < 2^n < 10^k$$

Avec le logarithme en base 10, on a alors

$$\frac{k-1}{n} < \log_{10}(2) < \frac{k}{n}$$

Briggs choisit $n = 10^{14}$, en regroupant ses calculs des puissances de 2 astucieusement, Briggs donne :

$$\log_{10}(2) \simeq 0{,}301\,029\,995\,663\,98$$

voir algorithme de Briggs (document algorithmes)

- Avant Napier
- Les travaux de Napier
- **Après Napier**

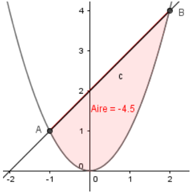
Saint-Vincent

Quadrature : pour une surface donnée S, il s'agit de chercher un carré de même aire. L'idée est donc de déterminer l'aire de la surface S.

- la question de la quadrature du cercle date de l'école de Pythagoricienne (Grèce vers -580 av.J.-C), son impossibilité a été résolue au XIX^e siècle notamment par les travaux de Joseph Liouville (français 1809-1882).

- la quadrature de la parabole a été résolue par Archimède (Italie 287-212 av. J.-C), il s'agit de trouver l'aire entre une corde de la parabole et la partie de la courbe que cette corde définie.

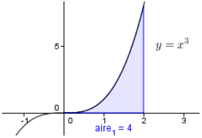
$$S_{[a;b]} = \frac{(b-a)^3}{6}.$$

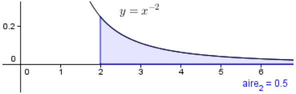


Quadrature de l'hyperbole

- la quadrature des fonctions puissances de la forme kx^m $(m \neq -1)$ a été résolue par Fermat (français 1ère décénie du XII^e siècle-1665) pour $m \neq -1$, $m \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Q}^+$, il s'agit de déterminer l'aire de la partie du plan pour $M(x; y)$, $a > 0$ et $x \in [0; a]$ si $m \geqslant 0$ ou $x \in [a; +\infty[$ si $m \leqslant -2$ et $y \in [0; f(x)]$

$S = \left| \dfrac{a^{m+1}}{m+1} \right|$ dans tous ces cas.

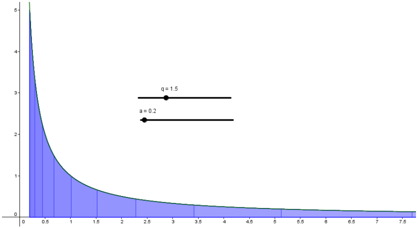




Quadrature de l'hyperbole : logarithme hyperbolique ou logarithme naturel

- la quadrature de l'hyperbole a été en partie résolue par Grégoire Saint-Vincent (belge 1584-1667), il s'agit de déterminer l'aire sous la l'hyperbole, $M(x; y)$, $x \in [a; +\infty[$ et $y \in [0; f(x)]$, Alphonse Antoine de Saraza (néerlandais 1617-1667) fera un lien entre l'hyperbole et les logarithmes puis Christian Huygens (néerlandais 1629-1695) calcule des logarithmes hyperboliques.

Pour une progression géométrique de raison q sur l'axe des abscisses, on a une progression arithmétique de raison $\ln(q)$ des aires sur l'intervalle $[aq^{n-1}; aq^n]$ sous l'hyperbole.



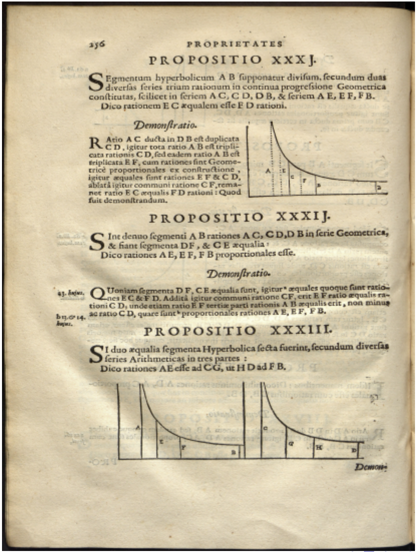
Quadrature de l'hyperbole : logarithme hyperbolique ou logarithme naturel

Méthode d'exhaustion : Le principe date d'Archimède (italien 287 - 212 av. J.-C), il s'agit d'un procédé ancien de calcul d'aires, de volumes et de longueurs de figures géométriques complexes. Le principe est celui d'un **double raisonnement par l'absurde** : Pour une surface d'aire $\mathcal{A}$ on suppose que son aire est strictement supérieure à $\mathcal{A}$, puis on aboutit à une contradiction ; on suppose ensuite que son aire est strictement inférieure à $\mathcal{A}$, puis on aboutit à une autre contradiction. On parvient ainsi à montrer que l'aire de la figure est $\mathcal{A}$.

Quadrature de l'hyperbole : logarithme hyperbolique ou logarithme naturel

Saint-Vincent dans son œuvre *Opus Geometricum Quadraturae circuli et sectionum coni* tente la quadrature du cercle et de l'hyperbole en se détachant du principe d'exhaustion par une approche "infinitésimale", très critiquée, notamment par Marin Mersenne (français 1588-1648). Il sera appuyé par son ami Sarasa puis par Gottfried Whilhelm Leibniz (allemand 1646-1716) qui dira des travaux de Saint-Vincent :
Et si Grégorius a Sansto Vinciento quadraturam circuli et hyperbolae non absolverit, egriegia multa tamen dedit.
Et si Grégoire Saint Vincent n'a résolu entièrement la quadrature de l'hyperbole, il n'en reste pas moins qu'il a livré des résultats remarquables.

Quadrature de l'hyperbole : logarithme hyperbolique ou logarithme naturel



256 PROPRIETATES

PROPOSITIO XXXJ.

SEgmentum hyperbolicum A B ſupponatur diviſum, ſecundum duas diverſas ſeries trium rationum in continua progreſsione Geometrica conſtitutas, ſcilicet in ſeriem A C, C D, D B, & ſeriem A E, E F, F B.

Dico rationem E C æqualem eſſe F D rationi.

Demonſtratio.

RAtio A C ducta in D B eſt duplicata C D, igitur tota ratio A B eſt triplicata rationis C D, ſed eadem ratio A B eſt triplicata E F, cum rationes ſint Geometricè proportionales ex conſtructione, igitur æquales ſunt rationes E F & C D, ablatâ igitur communi ratione C F, remanet ratio E C æqualis F D rationi : Quod fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIJ.

SInt denuo ſegmenti A B rationes A C, C D, D B in ſerie Geometrica, & fiant ſegmenta DF, & C E æqualia :

Dico rationes A E, E F, F B proportionales eſſe.

Demonſtratio.

a 13. *huius.* QUoniam ſegmenta D F, C E æqualia ſunt, igitur [a] æquales quoque ſunt rationes E C & F D. Additâ igitur communi ratione CF, erit E F ratio æqualis rationi C D, unde etiam ratio E F tertiæ parti rationis A B æqualis erit, non minus ac ratio C D, quare ſunt [b] proportionales rationes A E, E F, F B.

b 13. & 14. *huius.*

PROPOSITIO XXXIII.

SI duo æqualia ſegmenta Hyperbolica ſecta fuerint, ſecundum diverſas ſeries Arithmeticas in tres partes :

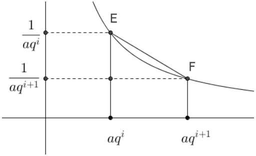
Dico rationes AE eſſe ad CG, ut H D ad F B.

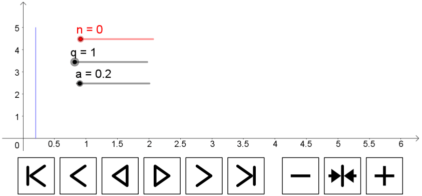
Demon-

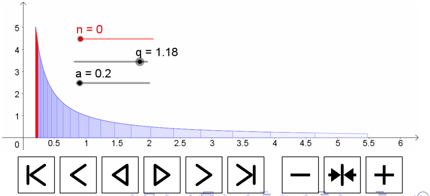
Quadrature de l'hyperbole : logarithme hyperbolique ou logarithme naturel

L'aire d'un trapèze $\mathcal{T}_i$ sur l'intervalle $[aq^i ; aq^{i+1}]$ avec $q > 1$ est

$$\frac{\left(\dfrac{1}{aq^i} - \dfrac{1}{aq^{i+1}}\right) \times \left(aq^{i+1} + aq^i\right)}{2} = \frac{q^2 - 1}{2q}.$$







Quadrature de l'hyperbole : logarithme hyperbolique ou logarithme naturel

La somme des aires des trapèzes $\mathcal{T}_i$ sur l'intervalle $[a; aq^n]$ est

$$n \times \frac{q^2 - 1}{2q}$$

On remarque qu'à une progression géométrique de raison q de premier terme a des abscisses, on associe une progression arithmétique de raison $\frac{q^2 - 1}{2q}$ de premier terme 0 des aires des trapèzes.

Les travaux de Saint-Vincent ne vont pas plus loin, il ne fait pas le lien avec le logarithme de Napier, c'est Sarasa qui fera le lien avec un comportement logarithme.

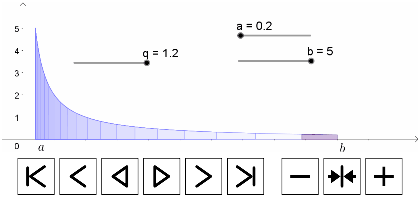
Quel lien avec le logarithme ?
(digression contemporaine)

Pour fixer l'intervalle $[a; aq^n]$,
On pose $b = aq^n$.

$log(b) - log(a)$
$= log(aq^n) - log(a)$
$= nlog(q)$

Le nombre n de trapèzes vérifie

$$\frac{b}{a} = q^n \text{ soit } n = \frac{log\left(\frac{b}{a}\right)}{log(q)}.$$



Le dernier trapèze est "tronqué".

Quadrature de l'hyperbole : logarithme hyperbolique ou logarithme naturel

Ainsi sur $[a; b = aq^n]$ la somme des aires des trapèzes est

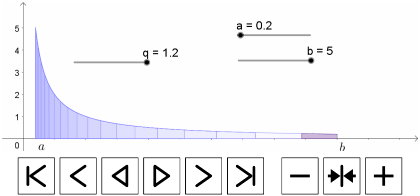
$$\frac{log\left(\frac{b}{a}\right)}{log(q)} \times \frac{q^2-1}{2q} \text{ et}$$

$$\frac{log\left(\frac{b}{a}\right)}{log(q)} = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\ln(q)}$$

$$q > 1 \text{ ; } \lim_{q \to 1} \frac{q^2-1}{2q ln(q)} = 1$$

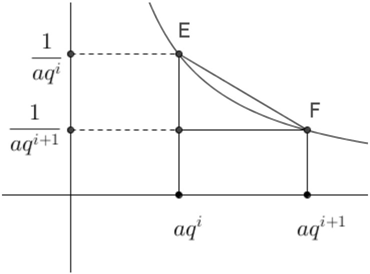
D'où la somme des aires des trapèzes $\mathcal{T}_i$ tend vers

$$log\left(\frac{b}{a}\right) = log(b) - log(a)$$



Quadrature de l'hyperbole : logarithme hyperbolique ou logarithme naturel

Qu'en est-il de l'aire sous l'hyperbole ?
On se place sur l'intervalle $[aq^i ; aq^{i+1}]$ pour i variant de 0 à $n-1$.

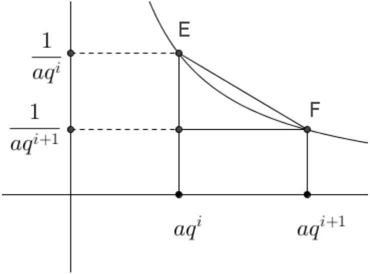


Soit x dans l'intervalle $[aq^i ; aq^{i+1}]$, on a

$\frac{1}{aq^{i+1}} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{aq^i}$ et
$\frac{1}{aq^{i+1}} \leqslant \frac{1}{x}$.
La droite (EF) a pour équation
$y = \frac{1}{aq^{i+1}}\left(\frac{-x+aq^i}{aq^i}+q\right)$.
La différence

$$\Delta(x) = \left(\frac{-x+aq^i}{aq^i}+q\right) - \frac{1}{x} = \frac{-x^2+x(aq^{i+1}+aq^i-a^2q^{2i+1}}{xa^2q^{2i+1}} = \frac{-(x-aq^i)(x-aq^{i+1})}{xa^2q^{2i+1}}.$$

Sur l'intervalle $[aq^i ; aq^{i+1}]$, $\Delta(x) > 0$.



Sur l'intervalle $[a; b = aq^n]$, un rectangle $\mathcal{R}_i$ a pour aire

$\frac{1}{aq^{i+1}}(aq^{i+1} - aq^i)$ la somme des aires des rectangles est

$$n \times \frac{1-q}{q} = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\ln(q)} \frac{q-1}{q}.$$

$$\lim_{q \to 1} \frac{q-1}{q \ln(q)} = 1$$

Ainsi la somme $(r(q))$ des aires des rectangles $\mathcal{R}_i$ est croissante et tend vers $\ln(b) - \ln(a)$.

Quadrature de l'hyperbole : logarithme hyperbolique ou logarithme naturel

On a vu que la somme $(t(q))$ des aires des trapèzes $\mathcal{T}_i$ est décroissante et tend vers $\ln(b) - \ln(a)$,
Par intégration on a :
$r(q) < \int_a^b \frac{1}{x} \mathrm{d}x < t(q)$
Passage à la limite :
$\int_a^b \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln(b) - \ln(a)$.
En particulier pour $a = 1$
$\int_1^b \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln(b)$.

Quadrature de l'hyperbole : logarithme hyperbolique ou logarithme naturel

Pour déterminer $(q > 1)$;

$$\lim_{q \to 1} \frac{q^2 - 1}{2q ln(q)} = 1$$

On peut utiliser partir de l'inégalité obtenue par Napier :

$h > 0$:

$$h < LOG(1-h) < \frac{h}{1-h}$$

$h > 0$:

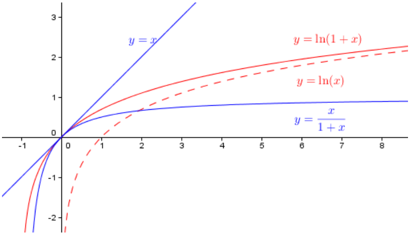
$$h < -\ln(1-h) < \frac{h}{1-h}$$

$$h > 0 : \frac{-h}{1-h} < \ln(1-h) < -h$$

$$h < 0 : \frac{h}{1+h} < \ln(1+h) < h$$

Cette inégalité reste vraie pour $h > 0$:

$$h > 0 : \frac{h}{1+h} < \ln(1+h) < h$$



Quadrature de l'hyperbole : logarithme hyperbolique ou logarithme naturel

Pour trouver la limite de $\dfrac{q^2-1}{2q\ln(q)}$ lorsque q tend vers 1 on pose $q = 1+h$, $h > 0$:

$h > 0$: $\dfrac{h}{1+h} < \ln(1+h) < h$

En posant $q = 1+h$, $h > 0$, on obtient alors

$$\frac{q^2-1}{2q(q-1)} < \frac{q^2-1}{2q\ln(q)} < \frac{(q^2-1)q}{2q(q-1)}$$

$$\frac{q+1}{2q} < \frac{q^2-1}{2q\ln(q)} < \frac{q+1}{2}$$

On trouve $\displaystyle\lim_{q\to 1} \frac{q^2-1}{2q\ln(q)} = 1.$

Quadrature de l'hyperbole : logarithme hyperbolique ou logarithme naturel

Pour trouver la limite de $\dfrac{q-1}{q\ln(q)}$ lorsque q tend vers 1 on pose $q = 1 + h$, $h > 0$:

$h > 0$: $\dfrac{h}{1+h} < \ln(1+h) < h$

En posant $q = 1 + h$, $h > 0$, on obtient alors

$\dfrac{1}{q} < \dfrac{q-1}{q\ln(q)} < 1$

On trouve $\displaystyle\lim_{q\to 1} \frac{q-1}{q\ln(q)} = 1$.

Nicolas Mercator (allemand 1620-1687) intègre terme à terme les sommes :

$$\sum_{i=0}^{n}(-0,1)^i = \frac{1-(-0,1)^{n+1}}{1+0,1}$$

et la limite de cette somme donne $\dfrac{1}{1+0,1}$

$$\sum_{i=0}^{n}(-0,21)^i = \frac{1-(-0,21)^{n+1}}{1+0,21}$$

et la limite de cette somme donne $\dfrac{1}{1+0,21}$

Quadrature de l'hyperbole : logarithme hyperbolique ou logarithme naturel

Jonh Wallis (britannique 1616-1703) puis Issac Newton (britannique 1643-1727) donneront une expression générale :

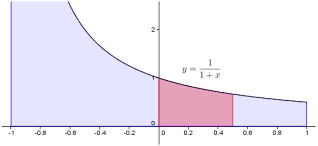
$-1 < x < 1$:

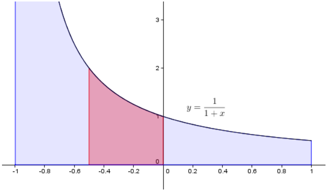
$$\sum_{i=0}^{n} (-x)^i = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$$

et la limite de cette somme donne $\dfrac{1}{1+x}$ en intégrant

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} x^{i+1}$$

donne l'aire sous l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{1+x}$ soit $\ln(1+x)$.





Quadrature de l'hyperbole : logarithme hyperbolique ou logarithme naturel

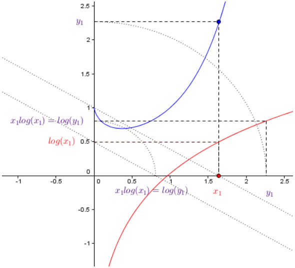
C'est ainsi que Mercator baptisera le logarithme hyperbolique ou logarithme naturel l'aire sous l'hyperbole entre 1 et a.
Ce qui revient à écrire :

$$\ln(a) = \int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Courbes

Des correspondances entre Jean Bernoulli (suisse 1667-1748) et Leibniz, l'exploitation algébrique du logarithme et sa courbe supposée tracée permet la construction point par point de la courbe d'équation $y = x^x$. x_1 donne $log(x_1)$ puis la construction de

$x_1 log(x_1) = log\left(x_1^{x_1}\right) = log(y_1)$ permet de trouver y_1.



C'est la première fois que le mot **fonction** est défini, Bernoulli donne cette définition : *On appelle ici fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.*

Le nombre e

Léonhard Euler (suisse 1707-1783) écrira exponentielle sous la forme d'un polynôme de l'exposant :
$a^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + ...$
$a^0 = 1$ donc $a^x = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + ...$
$a^{2x} = 1 + 2Bx + 4Cx^2 + 8Dx^3 + 16Ex^4 + ...$
et $a^{2x} = (a^x)^2 = \left(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + ...\right)^2 =$
$1 + 2Bx + (C + 2B)x^2 + 2(D + BC)x^2 + ...$
Par identification on a $2B = 2B$, $4C = 2C + B^2$, $8D = 2D + 2BC$
ainsi $C = \dfrac{B^2}{2}$, $D = \dfrac{B^3}{6}$ ainsi de suite...

$$a^x = 1 + Bx + \frac{B^2}{2}x^2 + \frac{B^3}{6}x^3 + \frac{B^4}{24}x^4 + ...$$

La seule fonction exponentielle ayant pour dérivée elle même et $a^0 = 1$ étant celle pour laquelle $B = 1$.

Ainsi $e^x = 1 + x + \dfrac{x}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + ...$ et $e = 2 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + ...$

Le nombre e

On rappelle que Newton a établi :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

Il en déduit la série réciproque $(z = \ln(1+x))$:

$$x = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

En posant $X = 1 + x$ on a

$$X = 1 + \ln(X) + \frac{\ln^2(X)}{2!} + \frac{\ln^3(X)}{3!} \ldots$$

On retrouve la série d'Euler :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Et l'unique nombre réel tel que l'aire sous l'hyperbole entre 1 et a soit égale à 1 est e.

bibliographique

- APMEP bulletin vert n 460 : fonctions logarithme et exponentielle Jean-Pierre Friedelmeyer.
- Joseph Bertrand Traité d'Algèbre *Paris, librairie Hachette. Édition 1866.*
- Simone Trompler L'histoire des logarithmes, centre de documentation pédagogique, Les cahiers du CeDop, université de Bruxelles, 2002, pour la publication en ligne.
- Thureau-Dangin, Textes mathématiques babyloniens, Leiden, E. J. Brill, 1938.
- Archimède, L'Arénaire, traduction C. Mugler, édition Les Belles Lettres, 1971.
- Chuquet, Triparty en la Science des Nombres, éd. A. Marre, Bull. bibl. storia math. t. XIII, 1880.
- M. Stifel, Arithmetica Integra, Nüremberg, 1544.
- Napier, Tercentenary Volume.
- N. T. Gridgeman, John Napier and the History of Logarithms, Scripta mathematica Vol. XXIX No 1-2, 1973.
- J. W. L. Glaisher, On early tables of logarithms and early history of logarithms, Q. J. Appl. Math. Vol. 48, 1920.
- Nicole VOGEL, Article paru dans l'Ouvert - Journal de l'APMEP d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg - Numéro 55 Juin 1989.
- Grégoire de Saint-Vincent, Opus Geometricum Quadraturae circuli et sectionum coni, Decem libris comprehensum sive Problema Austriacum, plus ultra quadratura ciculi, 1229 p., Anvers, 1647.
- De la méthode dite d'exhaustion : Grégoire Saint-Vincent, article de l'IREM de Caen, http://numerisation.univ-irem.fr/WH/IWH90011/IWH90011.pdf