BREVET DES MÉTIERS D'ART
ÉBÉNISTE

Mathématiques et Sciences Appliquées

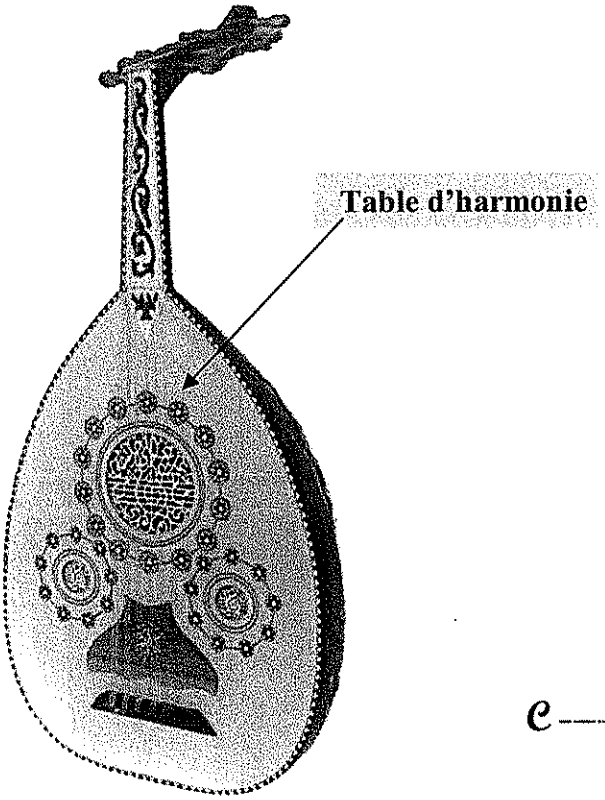
Session 2009

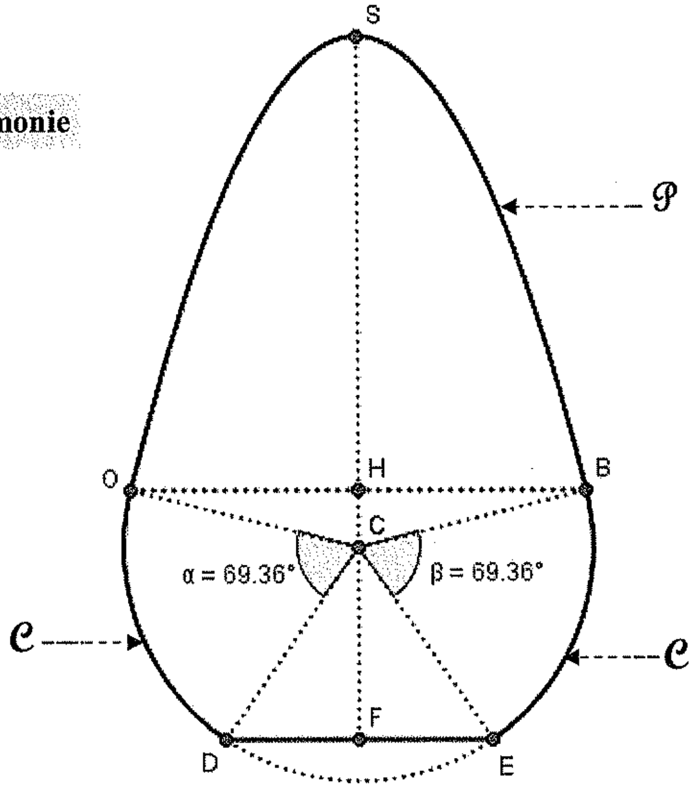
Le matériel autorisé comprend toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Mathématiques (24 points)

Problème (20 Points)

Un artiste amateur du célèbre instrument de musique l'oud, s'adresse à un Luthier pour la réalisation d'un modèle dont la photo et le dessin de la table d'harmonie sont fournis ci-dessous :





DE = 9,38 CF = 6,78

✓ Le dessin n'est pas à l'échelle.

✓ La droite (SF) est un axe de symétrie.

✓ Les mesures des longueurs sont exprimées en cm.

Le contour de la table d'harmonie peut être modélisé par deux courbes :

- La partie supérieure (OSB) a une forme parabolique.
- La partie inférieure (ODEB) est composée de deux arcs de cercle $\overset{\frown}{OD}$ et $\overset{\frown}{EB}$ de centre C reliés par le segment [DE].

$1^{ère}$ partie : Étude de l'arc de parabole de la table d'harmonie (OSB)

Dans le plan rapporté au repère orthonormal (Ox, Oy) d'unité graphique 1 cm de l'annexe 2, on veut tracer le contour de la table d'harmonie en représentant la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 16] par : $f(x) = a\,x^2 + b\,x$.

1-1. La courbe $\mathscr{P}$ représentative de la fonction f passe par les points S(8 ; 16) et B(16 ; 0). Déterminer les coefficients a et b, en déduire l'expression de $f(x)$. Justifier les résultats obtenus en écrivant le système de deux équations à 2 inconnues et en le résolvant.

1-2. Dans la suite, on considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 16] par :

$$f(x) = -\,0{,}25\,x^2 + 4\,x.$$

1-2-1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(x)$.

1-2-2. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ et étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0 ; 16].

1-2-3. Compléter le tableau de variation de la fonction f sur **l'annexe 1 de la page 7 / 10.**

1-2-4. Compléter le tableau de valeurs de la fonction f sur **l'annexe 1 de la page 7 / 10.**

1-2-5. Tracer la courbe $\mathscr{P}$ sur l'intervalle [0 ; 16] dans le repère de **l'annexe 2 de la page 8/10.**

1-3. On considère les points O(0 ; 0) et B(16 ; 0) de la courbe $\mathscr{P}$.

1-3-1. Calculer $f'(0)$. Que représente $f'(0)$ pour la tangente (T_O) à la courbe $\mathscr{P}$ au point O ?

1-3-2. Calculer $f'(16)$. Que représente $f'(16)$ pour la tangente (T_B) à la courbe $\mathscr{P}$ au point B ?

1-3-3. Tracer la droite (T_B), tangente à $\mathscr{P}$, dans le repère de **l'annexe 2 de la page 8/10.**

1-3-4. Associer à chacune des droites (T_O) et (T_B) son équation parmi les propositions suivantes : $y = 4\,x - 64$; $y = 4\,x$; $y = -4\,x$; $y = -4\,x + 64$
Justifier votre choix.

$2^{ème}$ partie : Etude de la partie inférieure de la table d'harmonie (ODEB)

Aux points de raccordements O et B, le Luthier souhaite que les droites tangentes au cercle $\mathcal{C}$ et à la parabole $\mathscr{P}$ soient confondues.

Pour cela, on considère dans le repère de l'annexe 2 :

- Le cercle $\mathcal{C}$ de centre C (8 ; -2) et de rayon $R = \|\overrightarrow{BC}\|$.
- La droite (T_B), tangente à la courbe $\mathscr{P}$ au point B (16 ; 0).

2-1. Vérifier que la droite (T_B), d'équation $y = -4x + 64$, passe par le point G (13 ; 12).
Dans le repère (Ox ;Oy) de **l'annexe 2 de la page 8/10**, tracer le vecteur $\overrightarrow{BG}$ et déterminer ses coordonnées.

2-2. Dans le même repère (Ox ;Oy) de **l'annexe 2 de la page 8/10**, placer le point C(8 ; –2), puis tracer le vecteur $\overrightarrow{BC}$. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ et le rayon R du cercle $\mathcal{C}$ $(R = \|\overrightarrow{BC}\|)$. La mesure du rayon R sera exprimée en centimètre et arrondie au centième.

2-3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BG}$. Que peut-on en déduire des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BG}$?

2-4. Dans le repère de **l'annexe 2 de la page 8/10**, construire les arcs $\overset{\frown}{OD}$ et $\overset{\frown}{EB}$ de centre C du cercle $\mathcal{C}$.

3ème partie : On souhaite calculer l'aire totale A_T de la table d'harmonie.

✓ Tous les résultats seront arrondis à 0,01.

✓ On donne : DE = 9,38 ; CF = 6,78 ; $\widehat{ECB} = \widehat{OCD} = 69{,}36°$; R = 8,25.

3-1. On note A_1 l'aire du triangle OBC et A_2 l'aire du triangle CDE. Calculer A_1 et A_2.

3-2. On note A_3 l'aire limitée par les deux secteurs circulaires d'arcs $\overset{\frown}{OD}$ et $\overset{\frown}{EB}$. Calculer A_3.

3-3. L'aire limitée par la parabole et l'axe des abscisses, notée A_P, est donnée par l'intégrale :

$$A_P = \int_0^{16} f(x)\,dx$$

- Donner une primitive de la fonction f
- Calculer A_P

3-4. Calculer en cm², l'aire totale A_T de la table d'harmonie.
Reporter vos résultats en cm² dans la figure de **l'annexe 1 page 7/10.**

Exercice (4 Points)

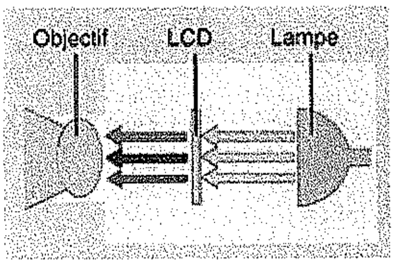
L'artisan désire commercialiser cet instrument de musique, il demande une étude de marché avant de lancer la fabrication en établissant les prévisions suivantes :
La production annuelle en 2010 serait de 140 unités, puis augmenterait de 5 % chaque année.

1. Calculer la production en 2011 et celle de 2012. Arrondir les résultats à l'unité.
2. On désigne par P_1, P_2 et P_3 les productions respectives de 2010, 2011 et 2012.
Les nombres P_1, P_2 et P_3 sont les termes d'une suite géométrique.
Préciser la raison de cette suite. Arrondir les résultats au centième.
3. La production P_n est donnée par la relation : $P_n = 140 \times 1{,}05^{(n-1)}$
Déterminer la production P_8 en 2017.
4. En quelle année la production dépassera-t-elle 228 unités ?
5. Déterminer la production totale S_{10}, des 10 premières années, entre 2010 et 2019.

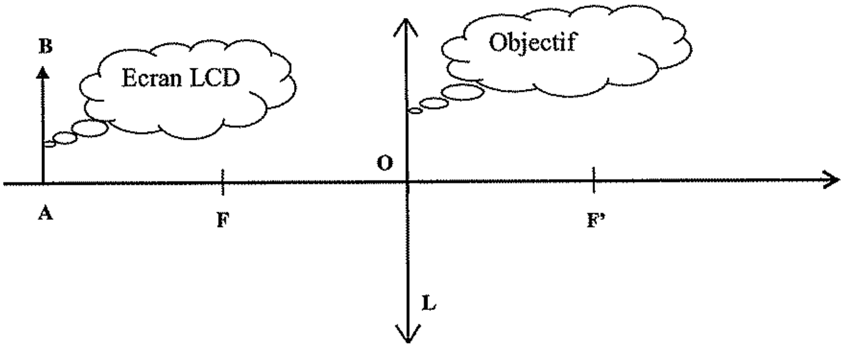
Sciences Physiques (16 points)

Partie 1 : (10 points)

Pour bien visualiser l'instrument, l'artisan projette la photo au mur de l'atelier à l'aide d'un vidéoprojecteur mono LCD (affichage à cristaux liquides). Le schéma de principe, simplifié, de l'appareil est le suivant :



Dans la suite du problème nous le modéliserons comme suit :



1-1. Quel est le type de la lentille utilisée pour schématiser l'objectif ?

1-2. Construire l'image A'B' de l'objet AB, sur le document 1 de **l'annexe 3 de la page 9/10** qui correspond au schéma de principe du dispositif (ce document n'est pas à l'échelle 1).

1-3. L'image obtenue est-elle réelle ou virtuelle ? Droite ou inversée ?

1-4. A l'aide de la question précédente, en déduire la position de l'écran LCD dans l'appareil.

1-5. Placer l'écran, sur le schéma de l'annexe 3 (document 1), pour que l'image A'B' soit nette.

La distance focale de la lentille qui équipe le vidéoprojecteur est f = 9,75 cm.
A l'intérieur de l'appareil, l'écran LCD est placé 10 cm devant la lentille.

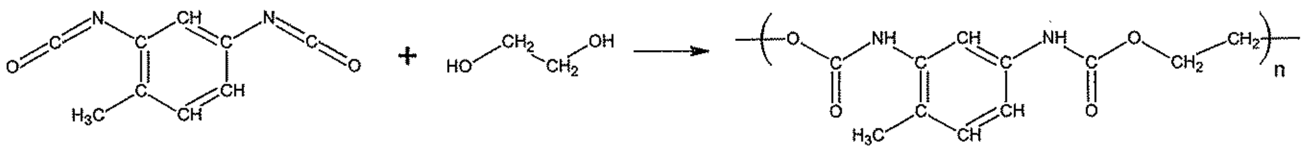
1-6. A quelle distance du mur doit-on installer l'appareil pour obtenir une image nette sur le mur ?

1-7. Calculer le grandissement γ de cet appareil.

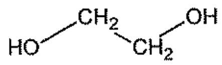
1-8. L'écran LCD est un rectangle de 4 cm sur 3 cm. Calculer les dimensions de l'image projetée au mur.

Partie 2 : (3 points)

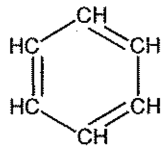
Une fois son travail achevé, l'ébéniste doit vernir son œuvre. Pour cela il utilise un vernis polyuréthane.
Les polyuréthanes sont des macromolécules obtenues par polymérisation.



Toluène-2,4-diisocyanate

2-1. A quelle famille de molécules organiques appartient la molécule  ?

2-2. Cette réaction de polymérisation est-elle une polyaddition ou une polycondensation ? Justifiez votre réponse.

2-3. La molécule de toluène-2,4-diisocyanate comporte un cycle qui peut être obtenu à partir de la molécule suivante : 

- Parmi les noms de molécules ci-dessous, indiquer celui correspondant à la molécule présentée ci-dessus :

  Toluène Styrène Benzène

- Parmi les familles de molécules proposées ci-dessous, indiquer celle correspondant à cette molécule :

  Alcynes Aromatiques Alcanes

Partie 3 : (3 points)

Le vernis est ensuite séché par infrarouges. La fréquence du rayonnement utilisé est $\nu = 10^{14}$Hz.

3-1. Calculer la longueur d'onde du rayonnement.

3-2. A l'aide du document 2 de l'annexe 3, indiquer si le rayonnement utilisé correspond à des infrarouges courts, moyens ou longs.

ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)

1ère partie :

- Question 1-2-3. Tableau de variations

x	0	….	16
Signe de $f'(x)$	….	….	….
Variations de $f(x)$	….	16	….

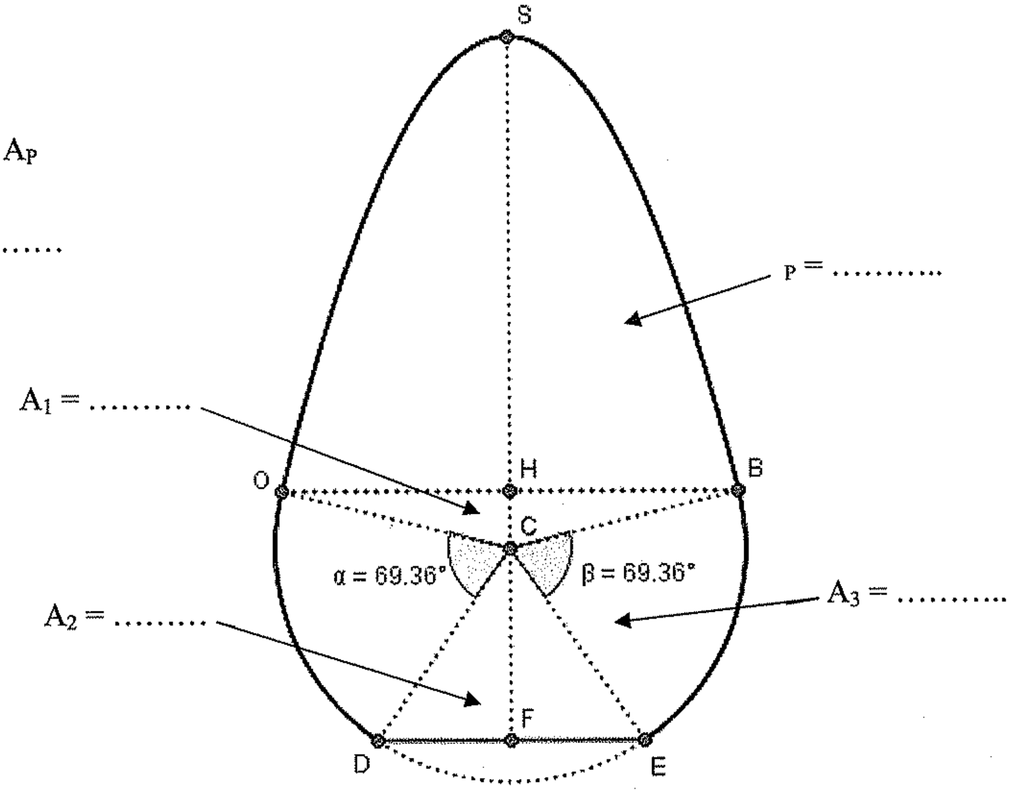
- Question 1-2-4. Tableau de valeurs Arrondir les valeurs à 0,01

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(x)$																	

3ème partie :

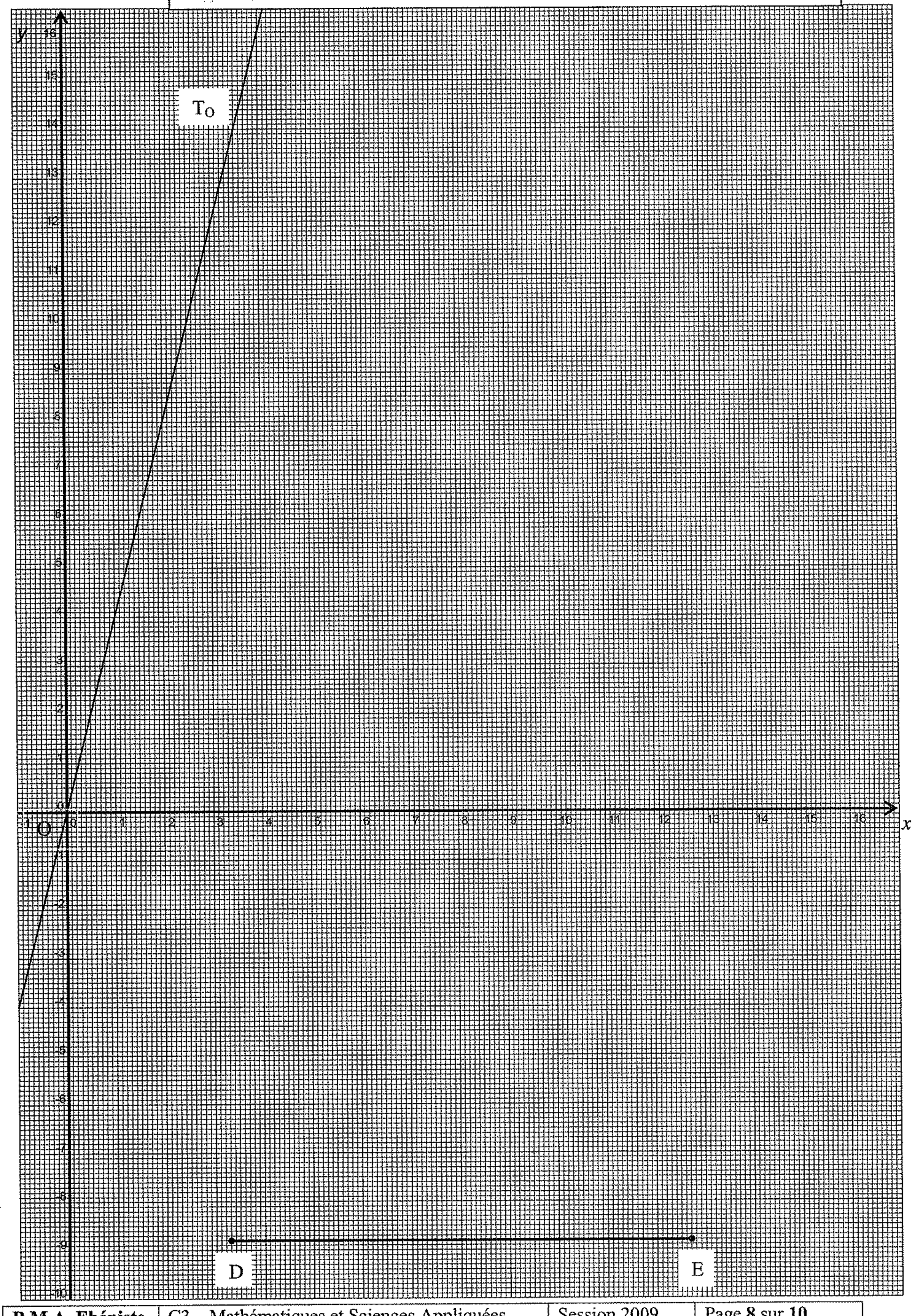
$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_P$

$A_T =$ ……………………



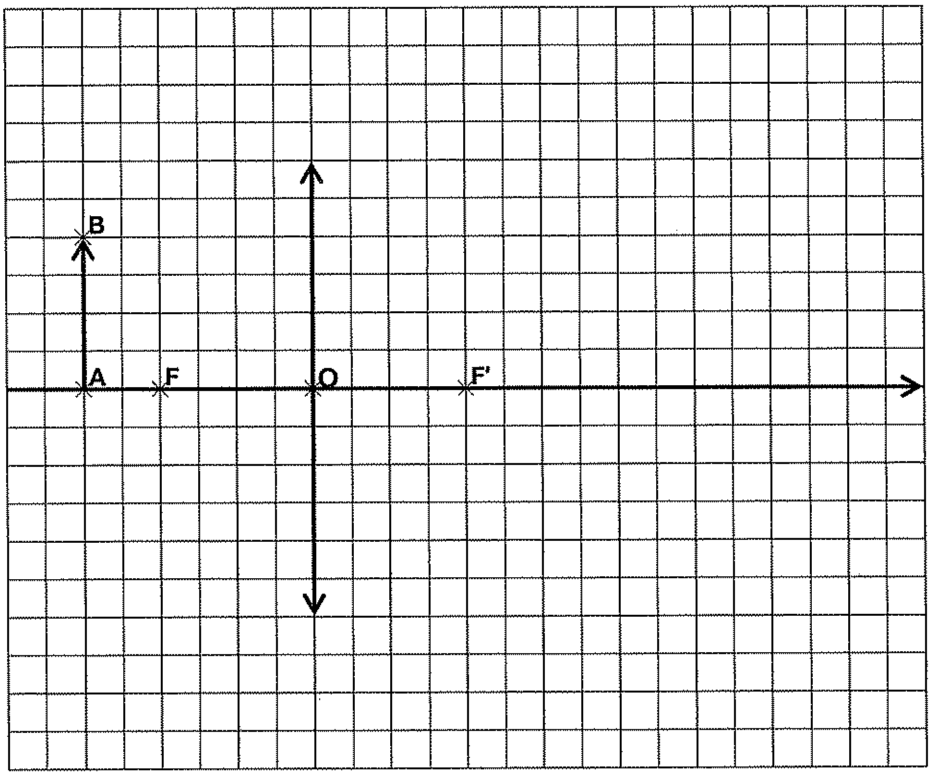
DE = 9,38 CF = 6,78

Annexe 2 : représentation graphique (à rendre avec la copie)

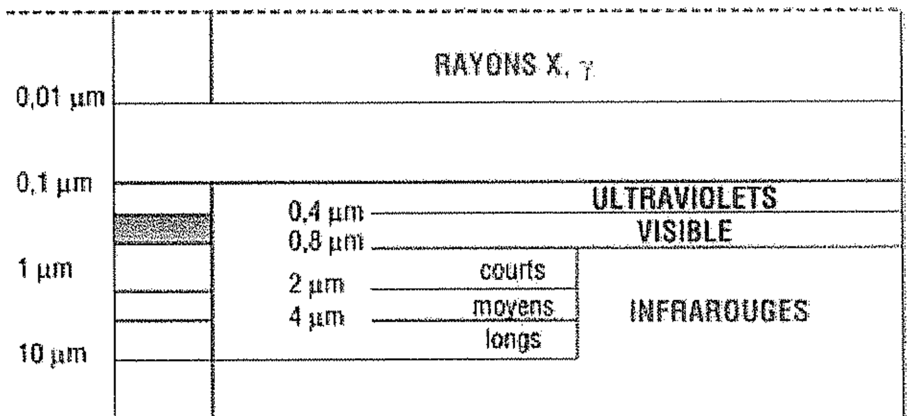


ANNEXE 3 (à rendre avec la copie)

DOCUMENT 1



DOCUMENT 2



Source : TRS_ONLINE.COM traitements et revêtements de surface
Les applications performantes des infrarouges et des ultraviolets dans l'industrie

$$1\ \mu m = 10^{-6}\ m$$

Fonction f	**Dérivé f'**
$f(x)$	$f'(x)$
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$a\,u(x)$	$a\,u'(x)$

Logarithme népérien :

- $\ln(a^n) = n \ln(a)$
- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$

Equation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :
  $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, une solution réelle double :
  $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, aucune solution réelle

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$

Suites arithmétiques :

Terme de rang 1 : u_1 et de raison r

- Terme de rang n : $u_n = u_1 + (n-1)r$
- Somme des k premiers termes :
  $u_1 + u_2 + \ldots + u_k = \frac{k(u_1+u_k)}{2}$

Suites géométriques

Terme de rang 1 : u_1 et de raison q

- Terme de rang n : $u_n = u_1 q^{n-1}$
- Somme des k premiers termes :
  $u_1 + u_2 + \ldots + u_k = u_1 \frac{1-q^k}{1-q}$

Calcul vectoriel dans le plan et dans l'espace

$\vec{v}\cdot\vec{v'} = xx'+yy'$ $\qquad$ $\vec{v}\cdot\vec{v'} = xx'+yy'+zz'$

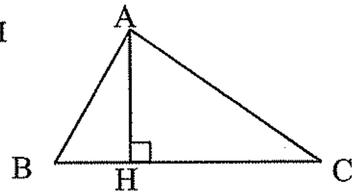
$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

- **Si** $\vec{v} \neq \vec{0}$ **et** $\vec{v'} \neq \vec{0}$: $\quad \vec{v}\cdot\vec{v'} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{v'}\| \cos(\vec{v}, \vec{v'})$

$$\vec{v}\cdot\vec{v'} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{v'}$$

Relations métriques dans le triangle rectangle

ABC rectangle en A, hauteur AH

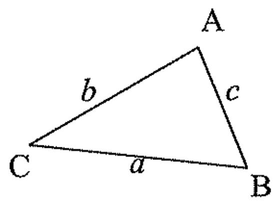


- $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- $AH \times BC = AB \times AC$
- $AB^2 = BH \times BC$
- $AH^2 = BH \times CH$

- $\sin\hat{B} = \frac{AC}{BC}$; $\cos\hat{B} = \frac{AB}{BC}$; $\tan\hat{B} = \frac{AC}{AB}$

Résolution de triangle quelconque.

R : rayon du cercle circonscrit.



$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

Aires dans le plan

Triangle : $\frac{1}{2}$ab $\sin\widehat{C}$; $\qquad$ Trapèze : $\frac{1}{2}$(B+b)h

Secteur circulaire : $\pi R^2 \times \frac{\alpha°}{360}$; $\qquad$ Disque : πR^2 ;

Calcul intégral

- $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$ (Relation de Chasles)
- $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$
- $\int_a^b kf(t)dt = k\int_a^b f(t)dt$

OPTIQUE

Formule de conjugaison : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$

Grandissement : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

Ondes électromagnétiques :

$\lambda = C \times T$; $\qquad T = \frac{1}{\nu}$; $\qquad C = 3 \times 10^8$ m/s

BREVET DES MÉTIERS D'ART
ÉBÉNISTE
Session 2009

CORRIGE Mathématiques

1re Partie : Etude de l'arc parabolique de la table d'harmonie (ASB) 10 points

1,5 pt (1 : système 0,5 :a et b)	1-1	$f(x) = a\,x^2 + b\,x$. La courbe $\mathscr{P}$ passe par les points **S(8 ; 16)** et **B(16 ; 0)** : $\begin{cases} f(8) = 16 \\ f(16) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 64a + 8b = 16 \\ 256a + 16b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a + b = 2 \\ 16a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = 4 \end{cases}$ *Donc* $f(x) = -0{,}25\,x^2 + 4\,x$.
1	1-2-1	$f'(x) = -0.5\,x + 4$
1	1-2-2	$f'(x) = 0 \Rightarrow -0{,}5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow$ signe de f'(x) : $\begin{cases} f'(x) > 0, & si\ 0 \leqslant x < 8 \\ f'(x) < 0, & si\ 8 < x \leqslant 16 \\ f'(x) = 0, & si\ x = 8 \end{cases}$
1	1-2-3	Tableau de variations sur l'annexe 1.
1	1-2-4	Tableau de valeurs sur l'annexe 1
2	1-2-5	Tracer la courbe $\mathscr{P}$ en annexe 2.
0.5	1-3-1	$f'(0) = -0{,}5 \times 0 + 4 = 4$. 4 représente le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{P}$ au point O.
0.5	1-3-2	$f'(16) = -0{,}5 \times 16 + 4 = -4$; -4 est le coefficient directeur de la droite tangente à $\mathscr{P}$ au point B(16 ; 0).
0.5	1-3-3	Tracer (T_B) dans le repère $\mathscr{R}$ de l'annexe 2.
1	1-3-4	• L'équation de la tangente (T_O) est $y = 4\,x$, car $f'(0) = 4$ passe par O(0 ; 0) • L'équation de la tangente (T_B) est $y = -4\,x + 64$, car $f'(0) = -4$ et elle passe par B(16 ; 0) donc $b = y + 4x = 0 + 4\times16 = 64$

$2^{ème}$ Partie : Etude de la partie inferieure de la table d'harmonie (ODEB) 5,5 points

1,5	2-1	$y = -4x + 64$; en G(13 ; 12) $\Rightarrow$ $y = -4 \times 13 + 64 = 12$. Tracé du vecteur $\overrightarrow{BG}$ et ses coordonnées du vecteur : $\overrightarrow{BG} = (13-16)\vec{i} + (12-0)\vec{j} = -3\vec{i} + 12\vec{j}$
0,5+0,5+1	2-2	Tracé et coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BC} = (8-16)\vec{i} + (-2-0)\vec{j} = -8\vec{i} - 2\vec{j}$; R=$\sqrt{68}$ d'où R≈8,25 cm
1 + 0,5	2-3	$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$; les 2 vecteurs sont orthogonaux
0,5	2-4	Construction des arcs du cercle $\mathcal{C}$: $\overset{\frown}{OD}$ et $\overset{\frown}{EB}$

$3^{ème}$ partie : On souhaite calculer l'aire totale A_T de la table d'harmonie. (3,5 points)

0.5	3-1	$A_1 = 8 \times 2 = 16$ et $A_2 = \dfrac{9,38 \times 6,78}{2} = 31,80$
1	3-2	$A_3 = 2 \times \dfrac{\pi R^2 \times \alpha°}{360} = 2 \times \dfrac{\pi \times 68 \times 69,36}{360} = 2 \times 41,14 = 82,39$
1 + 0,5	3-3	$A_p = \int_0^{16} f(x)\,dx = 170,67$; $F(x) = \dfrac{-0,25}{3}x^3 + 2x^2$
0.5	3-4	$A_T = 16 + 31,80 + 82,39 + 170,67 = 300,86$

Exercice (5 Points)

0.5 pt	1	La production en 2011 est = 147 unités. La production en 2012 est = 154 unités.
0.5	2	La raison de cette suite est = 1.05 ; car : 147/140 = 1.05 et 154/147 = 1.0476 ≈ 1.05
1	3	La production en 2017 est $P_8 = 140 \times 1,05^{(8-1)} = 196.99 \approx 197$ unités
2	4	Il faut résoudre l'équation : $140 \times 1,05^{(n-1)} = 228$ $\Rightarrow$ $1,05^{(n-1)} = \dfrac{228}{140} = 1.62857$ Donc : $n - 1 = \dfrac{\log(1.62857)}{\log(1.05)}$ $\Rightarrow$ n = 1+9.996 = 10.996 n ≈ 11ans donc en 2020
1	5	1. La production totale $S_{10} = 140 \times \dfrac{1-1,05^{10}}{1-1,05} = 1760.9 \approx 1761$ unités, entre 2010 et 2019.

ANNEXE 1 **(à rendre avec la copie)**

CORRIGE

1ère Partie :

- Question 1-2-3. Tableau de valeurs

x	0		8		16
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de $f(x)$	0	↗	16	↘	0

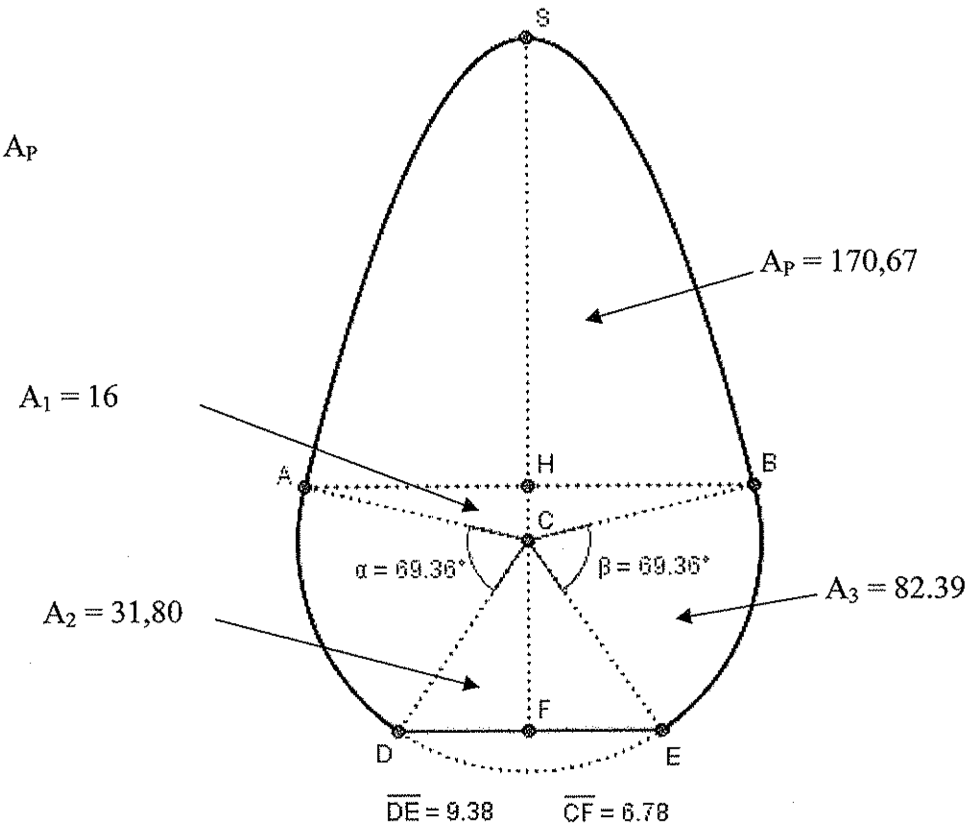
- Question 1-2-4. Tableau de valeurs Arrondir à 0,01

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(x)$	0	3.75	7	9.75	12	13.75	15	15.75	16	15.75	15	13.75	12	9.75	7	3.75	0

3ème Partie :

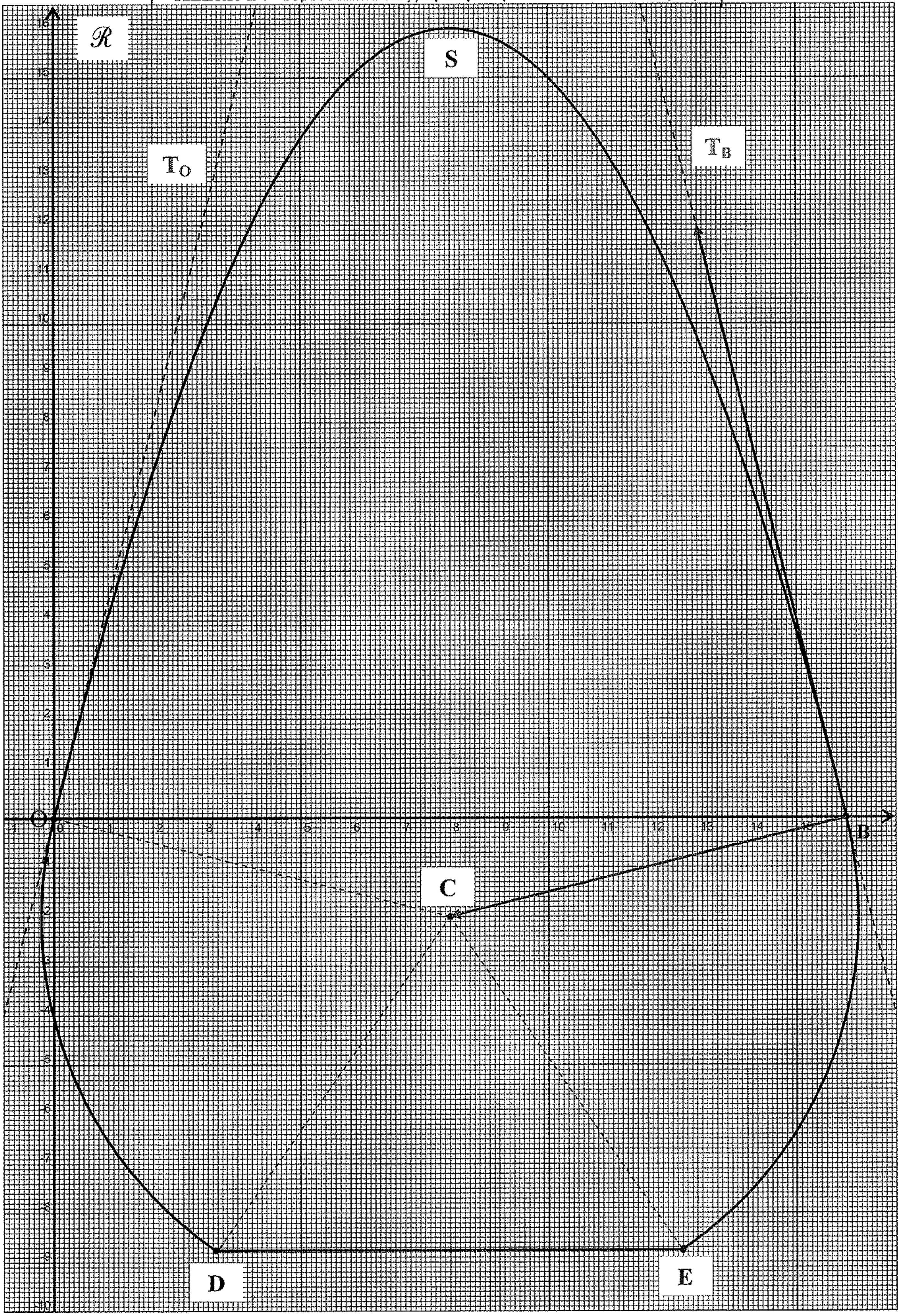
$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_P$

$A_T =$ 300,75



Annexe 2 : représentation graphique (à rendre avec la copie)

CORRIGE



CORRIGE Sciences Appliquées

Partie 1 (10 points)

0,5 pt	1 – 1	*C'est une lentille convergente.*
2 pts	1 – 2	*Sur l'annexe 3*
1 pt	1 – 3	*L'image est réelle et inversée.*
0,5 pt	1 – 4	*L'écran doit être inversé (« tête en bas »)*
0,5 pt	1 – 5	*Sur l'annexe 3*
1 pt (modifier la formule) 1 pt (pour -10) 1 pt	1 – 6	$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$ $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} + \frac{1}{\overline{OA}}$ $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{9,75} + \frac{1}{-10}$ $\frac{1}{\overline{OA'}} = 0,00256410....$ $\overline{OA'} = 390cm = 3.9m$
1 pt	1 – 7	$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{3,9}{(-0,1)} = -39$
1,5 pt	1 – 8	$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ *donc* $\overline{A'B'} = \gamma \times \overline{AB}$ *Les dimensions de l'image seront : 4 × -39 = -156cm et 3 × 39 = -117cm* *L'image fait donc 1,56m sur 1,17m*

Partie 2 (3 points)

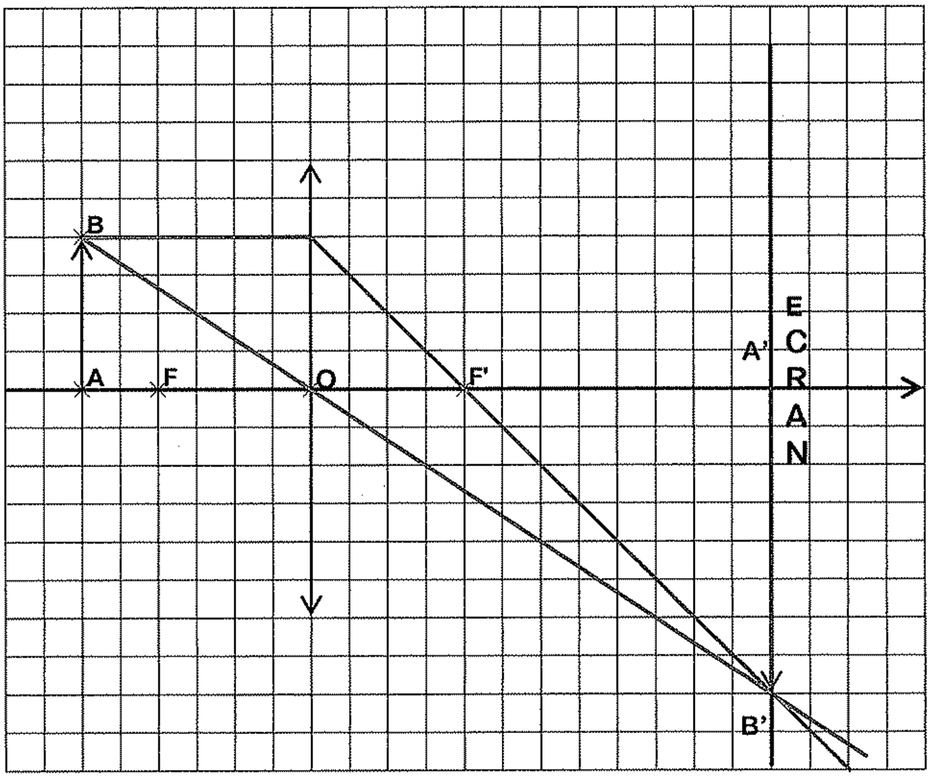
1 pt	2 – 1	*Cette molécule fait partie de la famille des alcools, c'est un dialcool ou diol*
1pt	2 – 2	*C'est une polyaddition car il n'y a pas éjection d'une petite molécule lorsque l'alcool se fixe sur l'isocyanate*
1 pt	2 – 3	*Cette molécule est le benzène, elle appartient à la famille des aromatiques.*

Partie 3 (3 points)

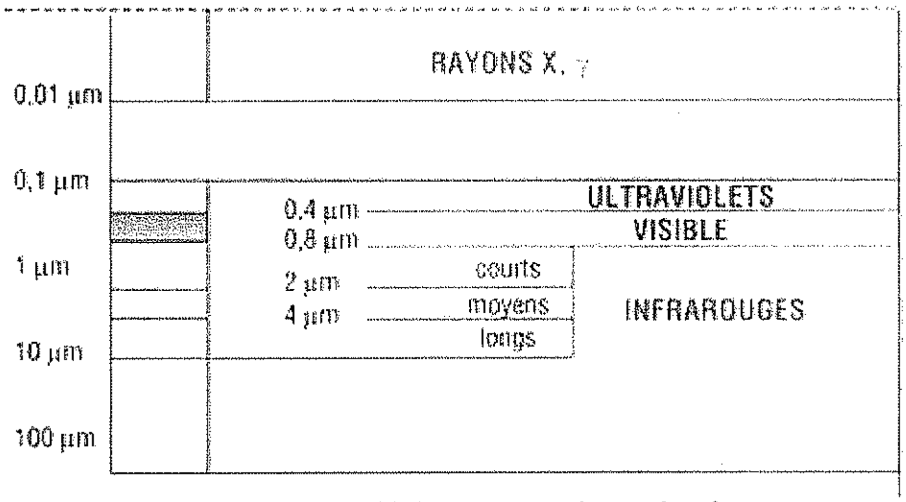
2 pts	3 – 1	$\lambda = C \times T = \frac{C}{\nu}$ $\lambda = \frac{3 \times 10^8}{10^{14}} = 3 \times 10^{-6} m = 3\ \mu m$
1 pt	3 – 2	*Le rayonnement correspond à des infrarouges moyens*

Annexe 3 : (à rendre avec la copie)

DOCUMENT 1



DOCUMENT 2



Source : TRS_ONLINE.COM traitements et revêtements de surface
Les applications performantes des infrarouges et des ultraviolets dans l'industrie