Fonctions à une variable **Activité 1**

☐0 ☐0 ☐0
☐1 ☐1 ☐1
☐2 ☐2 ☐2
☐3 ☐3 ☐3
☐4 ☐4 ☐4
☐5 ☐5 ☐5
☐6 ☐6 ☐6
☐7 ☐7 ☐7
☐8 ☐8 ☐8
☐9 ☐9 ☐9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et écrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

....

	Questions	Scores à reporter ici
Réaliser Maîtriser les connaissances figurant au programme de mathématiques	▪ 4	/
Approprier Employer des sources d'informations	▪ 2 ▪ 3	/
Raisonner ▪ Trouver une stratégie adaptée à un problème ▪ Mettre en oeuvre une stratégie : ▪ Utiliser de façon approprié des savoir-faire figurant au programme de mathématiques ▪ Argumenter ▪ Analyser la pertinence d'un résultat	▪ 5 ▪ 6	/
Communiquer ▪ par écrit ▪ par oral	▪ 1	/
	Total	/

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements influent sur la notation
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter zéro, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse.

Les fonctions à une variable réelle.

En mathématiques, la variable est notée x ; mais dans ses applications courantes les variables sont souvent le temps t, le prix, ou une grandeur physique mesurable telle que la température θ ou l'intensité i. Dans ce chapitre sur les fonctions à **une** variable **réelle**, on fait correspondre à une variable réelle, une autre variable qui peut être réelle ou complexe qui est notée en mathématiques y. Bien entendu dans ses applications la variable obtenue peut être de toute nature.

On établit donc une relation fonctionnelle entre la variable x et la variable y, en disant que y est fonction de x et en notant $y = f(x)$ qui se lira aussi « y égal f de x ».

Exemples :

- Dans le cas concret d'un resistor de 470 Ω, on peut établir une relation fonctionnelle entre la tension U qui est mesurable aux bornes de ce resistor et l'intensité qui le traverse I, par la loi d'Ohm $U = R \cdot I$. On notera $U = f(I)$ et on dira que « la tension U est fonction de I ». Cette relation fonctionnelle se notera $f(I) = R \cdot I$ où R est une constante. La fonction est alors une fonction affine.
- Dans le cas non pas d'un resistor mais d'une simple bobine définie par son inductance L de 0,5 mH et sa resistance interne r de 30 $\mathrm{m}\Omega$ à une pulsation ω de 100π $\mathrm{rad/s}$, on alors une fonction complexe à variable réelle entre d'une part la tension u aux bornes de la bobine et son intensité i la traversant. $u = (r + jL\omega)i$ où l'impédance $r + jL\omega$ est une valeur constante mais complexe (désigné par le j). On a alors $u = f(i)$ avec $f(i) = (r + jL\omega)i$.

On fait donc correspondre à un nombre réel x, un nombre réel ou complexe y par la fonction numérique f, on notera cela :

$$f : \begin{array}{rcl} x \in \mathbf{R} & \to & y \in \mathbf{C} \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

En reprenant le second exemple précédent on peut associer aux nombres i égal 1 ;2 et 3 ampères, les valeurs de tensions $f(1)$;$f(2)$ et $f(3)$ obtenu par un calcul du type :

$f(2) = (r + jL\omega) \cdot 2 = (30 \cdot 10^{-3} + j \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}) \cdot 2 = (60 + j) \cdot 10^{-3}$

COURS

Chapitre 2 Fonction d'une variable réelle

I Fonctions usuelles

1 Notation

Définition 1

Une **fonction à une variable réelle**, f fait correspondre à un nombre réel x, un nombre réel ou complexe y que l'on notera :

$$f : \begin{array}{rcl} x \in \mathbf{R} & \to & y \in \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{C} \\ x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

Question 1 ♣ Communiquer Donner une définition d'une fonction assortie d'un exemple que vous prendrez dans les formules que vous avez vues dans une autre matière.

....

....

....

....

....

....

Ne pas cocher ⟶ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

COURS

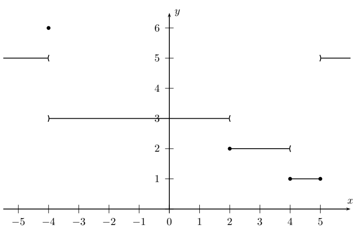
Définition 2

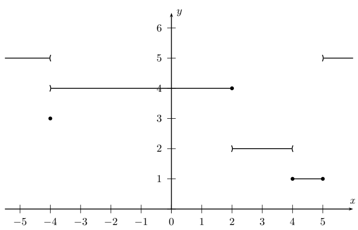
On appelle **ensemble de définition** D_f d'une fonction f, l'ensemble des x pour lesquels $f(x)$ existe.

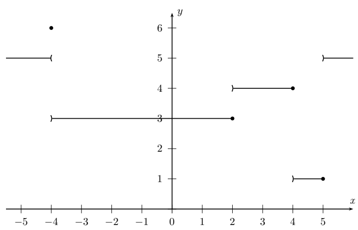
Question 2 Approprier Soit la fonction « en escalier » $e(t)$ fonction constante par intervalles définie sur l'intervalle de départ $]-\infty;+\infty[$ par :

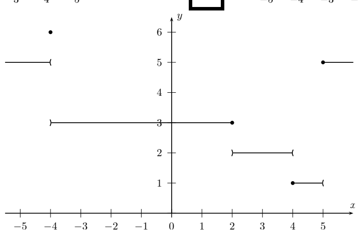
$$\begin{array}{llll} e(t)=5 & \text{pour } t<-4 & e(t)=2 & \text{pour } 2<t<4 \\ e(t)=6 & \text{pour } t=-4 & e(t)=1 & \text{pour } 4\leq t\leq 5 \\ e(t)=3 & \text{pour } -4<t\leq 2 & e(t)=5 & \text{pour } t>5 \end{array}$$

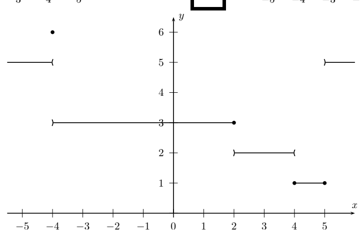
Déterminer la représentation graphique correcte.

☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

COURS

2 Fonction affine

2a Définitions

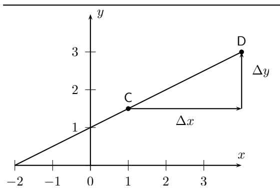
Définition 3

On appelle **fonction affine** une fonction f définie sur **R** telle $f(x)=a\cdot x+b$ avec a et b deux valeurs réelles ou complexes et $a\neq 0$.

Propriété 1

La fonction affine f est dérivable sur **R** avec $\forall x\in$ **R**, $f'(x)=a$

2b Détermination des caractéristiques a et b



Détermination du coefficient directeur $a=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_D-y_C}{x_D-x_C}$

Δx est compté positivement si le déplacement à lieu de gauche à droite et négativement dans le cas contraire.

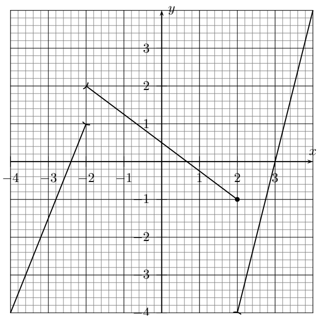
Δy est compté positivement si le déplacement à lieu de bas en haut et négativement dans le cas contraire.

Exemple : ici $\Delta x=+3$ et $\Delta y=+1.5$ et donc $a=\dfrac{1.5}{3}=0.5$

Détermination de l'ordonnée à l'origine b : On prend un point quelconque de la droite et on relève ses coordonnées $C(x_C;y_C)$. On remplace dans l'équation de la droite $y_C=a\cdot x_C+b$ et on obtient $b=y_C-a\cdot x_C$ (dans l'exemple $b=1$ et donc $y=0,5x+1$).

Question 3 ♣

Approprier $\forall x \in \mathbf{R}$, on a la fonction affine g par morceaux représentée ci-contre.
Déterminer les équations de droites et le tableau de variation correspondant ....



....
....
....
....
....
....
....

☐

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1 \parallel 2$	↘	$-1 \parallel -4$	↗	$+\infty$

☐

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1 \quad 2$	↘	$-1 \quad -4$	↗	$+\infty$

☐

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	-4	↗	$1 \quad 2$	↘	$-1 \quad -4$	↗	$+4$

☐

x	-4		-2		2		$+4$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1 \quad 2$	↘	$-1 \quad -4$	↗	$+\infty$

☐

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1 \mid 2$	↘	$-1 \mid -4$	↗	$+\infty$

☐

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$1 \parallel 2$	↘	$-1 \parallel -4$	↗	$+\infty$

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

COURS

2c Limites

Propriété 2

Pour les fonctions affines selon la valeur du coefficient directeur, on peut écrire comment évolue la fonction à l'infini à l'aide de la notation suivante :

- si $a > 0$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- si $a < 0$ alors c'est l'opposé $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

3 Fonction exponentielle

Définition 4

On appelle **fonction exponentielle** la fonction f telle que

$$f : \begin{array}{rcl} x \in \mathbf{R} & \to & y \in]0; +\infty[\\ x & \mapsto & y = \exp(x) \text{ ou } y = e^x \end{array}$$

Propriété 3

$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$; $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$; $(e^a)^b = e^{ab}$

Question 4 ♣ Réaliser À l'aide de votre calculatrice réaliser le tracé de la fonction exponentielle sur l'intervalle $]-5;2[$

Appeller le professeur pour lui montrer votre tracé

Ne pas cocher ⟶ ☐ ☐ ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Raisonner Indiquer les limites correspondant à la fonction exponentielle

☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = -\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to 0} e^x = +\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = +\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = -\infty$
☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to 0} e^x = -\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = 0$
☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

COURS

Propriété 4

La fonction exponentielle $f = e^x$ est dérivable sur **R** avec $\forall x \in$ **R**, $f'(x) = e^x$

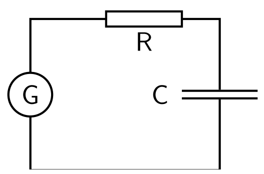
Dans le cas d'une fonction composée $f(x) = e^{u(x)}$, on aura $f'(x) = u'(x)\cdot e^{u(x)}$ où u' est la fonction dérivée de la fonction u.

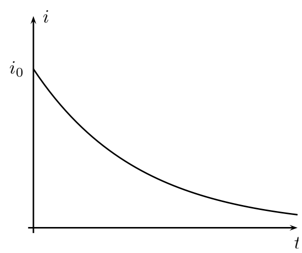
4 Tangente et nombre dérivé

Propriété 5

Le **coefficient directeur de la tangente** en un point $\mathrm{T}(x_T;y_T)$ de la représentation graphique d'une fonction f correspond au **nombre dérivé** en ce point $a = f'(x_T)$.

Question 6 ♣ Raisonner Pour protéger son autoradio des parasites électriques dus à des accessoires perturbateurs, on place un filtre passe bas du type :





dont la réponse est du type $i = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ lors de la décharge du condensateur avec $\tau = RC$. Afin de mieux comprendre la durée de la décharge on décide de tracer la tangente à l'origine à la courbe.

- Tracer sur la courbe, la tangente à la courbe à l'origine,
- Déterminer l'équation de cette tangente, ...
....
....
....
....
....
....
....
....
- indiquer pour quelle valeur de t la tangente coupe l'axe des temps. ....
....

Ne pas cocher ⟶ ☐ ☐ ☐ ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

✍✍✍✍✍ N'OUBLIEZ PAS DE COMPLÉTER L'AUTOÉVALUATION ✍✍✍✍✍