Calcul différentiel et intégral **Activité 2**

☐0 ☐0 ☐0
☐1 ☐1 ☐1
☐2 ☐2 ☐2
☐3 ☐3 ☐3
☐4 ☐4 ☐4
☐5 ☐5 ☐5
☐6 ☐6 ☐6
☐7 ☐7 ☐7
☐8 ☐8 ☐8
☐9 ☐9 ☐9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et écrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

....

	Questions	Scores à reporter ici
Réaliser Maîtriser les connaissances figurant au programme de mathématiques	▪ 4,5	/
Approprier Employer des sources d'informations	▪ 1	/
Raisonner ▪ Trouver une stratégie adaptée à un problème ▪ Mettre en oeuvre une stratégie : ▪ Utiliser de façon approprié des savoir-faire figurant au programme de mathématiques ▪ Argumenter ▪ Analyser la pertinence d'un résultat	▪ 2,3,6	/
Communiquer ▪ par écrit ▪ par oral		/
	Total	/

Chaque tâche complexe ou question fait appel à plusieurs compétences mais n'est évaluée que pour celle indiquée.
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter zéro, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse.

COURS

Propriété 8

Soit f une fonction dérivable et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$

Propriété 9

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$ alors

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$$

3 Moyenne

Définition 3

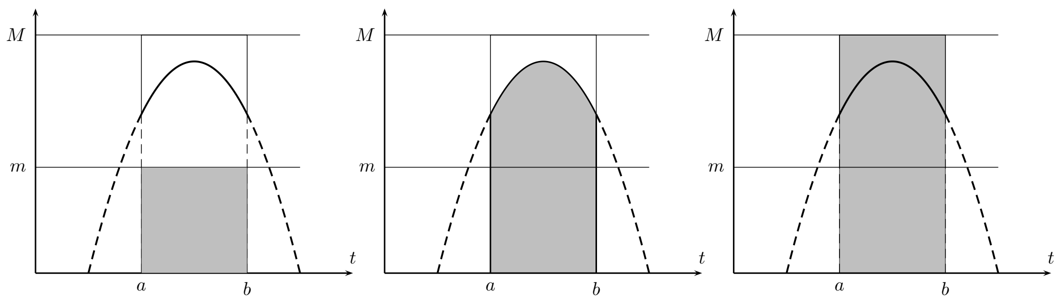
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, on appelle **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$, la valeur :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Propriété 10

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$. Soient m et M deux réels.

Si $\forall t \in [a;b]$ on a $m \leqslant f(t) \leqslant M$ alors $m\cdot(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant M\cdot(b-a)$



Régime sinusoïdal monophasé

Notation générale

En régime sinusoïdal, toutes les grandeurs peuvent être écrites sous la forme : $u(t) = U_{Max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_U)$ où :

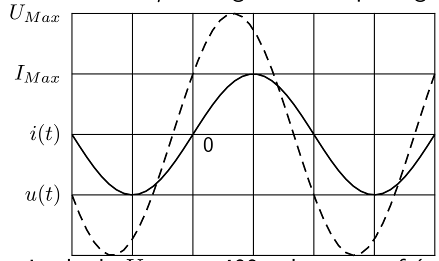
- U_{max} désigne la grandeur maximale,
- ω désigne la pulsation en rad/s,
- φ_U désigne la phase à l'origine.

Les grandeurs ainsi définies sont périodiques de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et de fréquence $F = \frac{1}{T}$. La période est toujours exprimée en seconde dim $T = \mathsf{T}$ et la fréquence en hertz dim $F = \mathsf{T}^{-1}$.

Intensité et tension

Généralement on pose l'intensité comme origine des phases et on lui définit une phase nulle à t=0. La tension est alors définie par rapport à l'intensité et φ désigne le déphasage entre tension et intensité :

$$i(t) = I_{Max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$
$$u(t) = U_{Max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$



La tension du secteur est définie par une valeur maximale de $U_{Max} = 400$ volts et une fréquence $F = 50$ hertz, ainsi on écrit couramment en utilisant $\omega = 2\pi F = 100\pi$ l'expression de la tension du secteur $u(t) = 400\sin(100\pi t + \varphi)$.

Puissance instantanée

La puissance se définit comme le produit de la tension par l'intensité soit :

$$P(t) = u(t) \times i(t) = U_{Max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \times I_{Max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

en utilisant la relation trigonométrique $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ on exprime la puissance comme somme d'une **puissance active** constante et d'une puissance dépendant du temps nommée **puissance fluctuante** :

$$P(t) = \frac{U_{Max} \cdot I_{Max} \cos\varphi}{2} + \frac{U_{Max} \cdot I_{Max} \cdot \cos(2\omega t + \varphi)}{2}$$

Cette dernière expression exprime clairement le fait que la puissance en monophasé varie sinusoïdalement ce qui n'est pas génant pour des éléments resistifs mais peut devenir un réel problème pour l'usure des éléments mécaniques des moteurs. Le triphasé est alors la solution idéale.
La puissance moyenne est obtenue généralement en faisant la moyenne de P sur une période soit avec l'expression $\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$. Mais ce calcul n'est pas nécessaire car la moyenne du cosinus sur une période est nulle. L'expression de la puissance moyenne est donc

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \cdot U_{Max} \cdot I_{Max} \cdot \cos\varphi$$

Valeurs efficaces

Si l'on veut qu'un signal alternatif ait la même efficacité qu'un signal continu il faudra que la "valeur efficace" du signal alternatif soit égale à cette valeur continue. Cela se traduit mathématiquement par un calcul de valeur moyenne de signal redressé soit

$$U_{eff} = \sqrt{\overline{u(t)^2}}$$

Dans le cas d'un signal sinusoïdal avec $u(t) = U_{Max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ et avec la relation trigonométrique $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ on obtient

$$U_{eff} = \frac{U_{Max}}{\sqrt{2}}$$

Question 1 ♣ Approprier Rappeler la démonstration de l'expression de $\sin^2(\theta)$ obtenue dans le chapitre sur les complexes. ...

NE PAS COCHER ⟶ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣

Vous disposez d'un voltmètre non RMS. Vous savez donc que celui-ci indique bien la tension efficace à condition que le signal soit alternatif sinusoïdal.

En effet, le composant principal du voltmètre applique un coefficient correctif (appelé facteur de forme) après avoir mesuré la tension moyenne. Vous allez devoir déterminer ce coefficient correctif.

Raisonner Calculer la valeur moyenne U_{moy} sur une période du signal sinusoïdal redressé $f(t) = |U_{Max}\sin(t)|$

NE PAS COCHER ⟶ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣

Raisonner Calculer la valeur efficace U_{eff} sur une période du signal sinusoïdal redressé $f(t) = |U_{Max}\sin(t)|$ en calculant U_{eff}^2

NE PAS COCHER ⟶ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣

Réaliser Exprimer alors U_{eff} en fonction de U_{moy}.

NE PAS COCHER ⟶ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

COURS

4 Méthodes

Propriété 11

Intégration par parties. Soient $u(t)$ et $v(t)$ deux fonctions dérivables sur un intervalle [a ;b] alors :

$$\int_a^b u'(t)\cdot v(t)dt = [u(t)\cdot v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)\cdot v'(t)dt$$

En effet, on sait que $(u(t)\cdot v(t))' = u'(t)\cdot v(t) + u(t)\cdot v'(t)$ que l'on peut écrire :

$$\frac{d(u(t)\cdot v(t))}{dt} = \frac{d(u(t))}{dt}\cdot v(t) + u(t)\cdot\frac{d(v(t))}{dt}$$

$$\frac{d(u(t))}{dt}\cdot v(t) = \frac{d(u(t)\cdot v(t))}{dt} - u(t)\cdot\frac{d(v(t))}{dt}$$

$$d(u(t))\cdot v(t)dt = d(u(t)\cdot v(t)) - u(t)dt\cdot d(v(t))$$

puis en sommant sur l'intervalle [a ;b] on obtient

$$\int_a^b d(u(t))\cdot v(t)dt = \int_a^b d(u(t)\cdot v(t)dt - \int_a^b d(v(t))\cdot u(t)dt$$

$$\int_a^b d(u(t))\cdot v(t)dt = [(u(t)\cdot v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)\cdot d(v(t))dt$$

Question 5 ♣

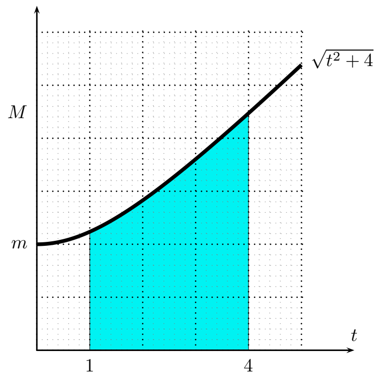
Réaliser En utilisant la propriété 11 d'intégration par parties, réaliser les calculs des intégrales suivantes : $\int_e^{e^2}\ln(t)dt$; $\int_0^1 te^t dt$ ..

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

NE PAS COCHER ⟶ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣



Raisonner Proposer un encadrement pour l'aire ci-contre ....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

NE PAS COCHER ⟶ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

✍✍✍✍✍ N'OUBLIEZ PAS DE COMPLÉTER L'AUTOÉVALUATION ✍✍✍✍✍