Calcul différentiel et intégral **Activité 3**

☐0 ☐0 ☐0
☐1 ☐1 ☐1
☐2 ☐2 ☐2
☐3 ☐3 ☐3
☐4 ☐4 ☐4
☐5 ☐5 ☐5
☐6 ☐6 ☐6
☐7 ☐7 ☐7
☐8 ☐8 ☐8
☐9 ☐9 ☐9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et écrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

. . . .

	Questions	Scores à reporter ici
Réaliser Maîtriser les connaissances figurant au programme de mathématiques	▪ 7	/
Approprier Employer des sources d'informations	▪ 1 ▪ 3 ▪ 6	/
Raisonner ▪ Trouver une stratégie adaptée à un problème ▪ Mettre en oeuvre une stratégie : ▪ Utiliser de façon approprié des savoir-faire figurant au programme de mathématiques ▪ Argumenter ▪ Analyser la pertinence d'un résultat	▪ 2 ▪ 4 ▪ 5 ▪ 8	/
Communiquer ▪ par écrit ▪ par oral		/
	Total	/

Chaque tâche complexe ou question fait appel à plusieurs compétences mais n'est évaluée que pour celle indiquée.
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter zéro, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse.
Les question ouvertes sont cochées par le professeur, elles sont grisées. AT=Autonomie totale AP=Autonomie partielle RC=Résultat correct

COURS

II Développements limités

1 Rappels

Définition 4

Une **suite géométrique** est une suite de nombres tel que chaque terme est obtenu du précédent par MULTIPLICATION d'un nombre constant appelé **raison** et noté q.

Propriété 12

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$

Propriété 13

La somme des n premiers termes (de u_1 à u_n) d'une suite géométrique vaut :

$$S = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Question 1 Approprier Soit la suite de premier terme 100. Calculer le cinquantième terme dans les deux cas suivants :

- la raison vaut 0,9
- la raison vaut 1,1

Indiquer vos constatations quant à la convergence de la suite selon la valeur de la raison.

☐AT ☐AP ☐RC

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Question 2 Raisonner En déduire la $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ selon la valeur de q ☐AT ☐AP ☐RC

....

....

....

....

....

Question 3 Approprier Indiquer à quoi correspond l'expression suivante : $1+q+q^2+q^3+...+q^n$ ☐AT ☐AP ☐RC

....

....

....

....

....

Question 4 Raisonner Justifier l'écriture de l'expression suivante : $\dfrac{1}{1-q} = 1+q+q^2+q^3+...$ lorsque $0<q<1$.

☐AT ☐AP ☐RC

....

....

....

....

....

On vient de montrer que pour un nombre petit (q), on pouvait écrire l'expression $\dfrac{1}{1-q}$ sous la forme d'un polynôme de degré n. Prenons par exemple $q=0,1$ alors on a :

- $1+q=1+0,1=1,1$
- $1+q+q^2=1+0,1+0,01=1,11$
- $1+q+q^2+q^3=1,111$

et :

- $\dfrac{1}{1-q}=\dfrac{1}{1-0,1}=\dfrac{1}{0,9}=1,1111...111$

On aurait pu se contenter d'une approximation d'ordre 1 et dire que à l'ordre 1 : $\dfrac{1}{1-q}=1+q$ ou souhaiter une précision plus grande et écrire à l'ordre 2 que $\dfrac{1}{1-q}=1+q+q^2$ et à chaque fois savoir qu'il manque un reste que l'on néglige.

On pourrait alors noter à l'ordre 1 : $\dfrac{1}{1-q}=1+q+R_1$ où R_1 désigne le reste à l'ordre 1, et ainsi de suite

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+q^3+...+q^n+R_n$$

où R_n désigne le reste à l'ordre n.

Dans l'activité 4 du chapitre 2, on montré la propriété 18 à savoir que proche de 0, $\sin(t)$ et t sont des infiniments petits équivalents et aussi que $1-\cos(t)$ et $\frac{1}{2}t^2$ étaient aussi des infiniments petits équivalents. Cela nous permet d'écrire que pour t proche de 0 :

- $\sin(t) = t + R_1$ sa **partie principale** est d'ordre 1,
- $1-\cos(t) \simeq \frac{1}{2}t^2$ ou encore $\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + R_2$ sa **partie principale** est d'ordre 2.

On se rend alors compte que pour toute fonction peut être mise aisément sous la forme d'un polynôme de degré n à condition que celui-ci ne devienne pas infini.

Question 5 Raisonner À partir de la définition 2 de ce chapitre, montrer que l'on a : $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$

☐AT ☐AP ☐RC

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Question 6 Approprier À partir d'une propriété de l'activité 2, que vous rappelerez, indiquer la condition sur $f'(t)$ pour pouvoir majorer : $\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ par $M(x-a)$

☐AT ☐AP ☐RC

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Dans la suite de l'activité, on va chercher le polynôme de degré 3 qui peut être associé à la fonction exponentielle :

$$f(x) = e^x$$

En utilisant la relation de la question 5, on peut écrire en prenant a=0 et si $f(t) = e^t$ alors $f'(t) = e^t$ et l'on a :

$$e^x = e^0 + \int_0^x e^t\mathrm{d}t$$

où $\int_0^x e^t\mathrm{d}t$ est le reste à l'ordre 0 soit donc à l'ordre 0 : $e^x = 1 + R_0$

Question 7 Réaliser Par une intégration par partie de $e^x = e^0 + \int_0^x e^t\mathrm{d}t$ en posant $u' = 1$ et en choisissant la primitive de u pour qu'elle soit nulle à la borne x soit $u = t - x$, montrer que l'on peut écrire à l'ordre 1 :

$$e^x = 1 + x - \int_0^x (x-t)e^t\mathrm{d}t$$

où $\int_0^x (x-t)e^t\mathrm{d}t$ désigne le reste R_1

☐AT ☐AP ☐RC

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Question 8 Raisonner Recommencer le raisonnement deux fois et montrer que l'on peut écrire à l'ordre 3 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + R_3$

☐AT ☐AP ☐RC

....
....
....
....
....
....
....
....

COURS

2 Formulaire En notant $t^n\varepsilon(t)$ le reste d'ordre n on a :

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + ... + \frac{t^n}{n!} + t^n\varepsilon(t)$$
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + ... + (-1)^n t^n + t^n\varepsilon(t)$$
$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n\varepsilon(t)$$
$$\sin(t) = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + ... + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$$
$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + ... + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$$
$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t)$$

3 Théorèmes de calculs

Définition 5

Pour une fonction $f(t)$ le polynôme $a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4 + ... + a_n \cdot t^n + t^n\varepsilon(t)$ est appelé **partie régulière** du développement limité d'ordre n de cette fonction en zéro.

Théorème 1

La somme de deux infiniment petits du même ordre est en général un infiniment petit du même ordre, et la partie principale est la somme des parties principales.

Théorème 2

Le produit de deux infiniment petits est un infiniment petit dont l'ordre est la somme des ordres, et la partie principale est le produit des parties principales.

Théorème 3

Le quotient de deux infiniment petits (dont l'ordre du numérateur est supérieur à l'ordre du dénominateur) est un infiniment petit dont l'ordre est la différence des ordres, et la partie principale est le quotient des parties principales.

✍✍✍✍✍ N'OUBLIEZ PAS D'APPRENDRE VOTRE COURS ET DE COMPLÉTER L'AUTOÉVALUATION ✍✍✍✍✍