

<http://pedagogie.ac-limoges.fr/ses/spip.php?article517>



# Fonction de production et contribution des facteurs à la croissance du PIB

- Terminale ES - Approfondissements - Croissance et développement -

Date de mise en ligne : samedi 28 septembre 2013

---

Copyright © SES Limoges - Tous droits réservés

---

Dans une entreprise la production varie lorsqu'on utilise plus ou moins de travail ou/et de capital, on peut donc considérer qu'il existe une fonction de production. C'est une relation technique.

Si  $Q$  est la quantité de produits et  $N$  et  $K$  respectivement les quantités de travail et de capital alors la forme générale de la fonction de production est :

$$Q = f(N, K)$$

Le PIB d'un pays mesure la valeur ajoutée de l'ensemble des producteurs et il est logique de penser que le niveau du PIB dépend des quantités de travail et de capital qui sont effectivement utilisées dans cette économie. Il y a donc une fonction de production nationale. On peut essayer de construire à partir des fonctions de production des différents producteurs par addition, la fonction de production agrégée. Les problèmes mathématiques soulevés par cette addition sont insolubles dès lors que toutes les fonctions individuelles (celles des producteurs) ne sont pas identiques. La solution pour construire une fonction de production agrégée consiste alors à retrouver statistiquement le lien qui s'établit entre volume de la production et les quantités de travail et de capital. La fonction de production agrégée une relation statistique représentant ce que pourrait être une « entreprise » qui réaliserait le PIB.

Mathématiquement les fonctions sont plus faciles à traiter lorsqu'elles sont continues c'est à dire lorsque pour toute valeur de  $N$  ou de  $K$  on obtient une valeur de  $Q$ . Économiquement l'hypothèse de continuité de la fonction de production pour une entreprise est peu vraisemblable parce que cela suppose que les quantités de facteurs sont parfaitement divisibles (on peut faire varier  $N$  et  $K$  d'une très petite quantité) et que toutes les combinaisons de  $N$  et de  $K$  sont possibles (les facteurs de production sont substituables).

Au plan macroéconomique la solution est plus facilement acceptable.

Quand la substitution n'est pas possible on dit que la fonction de production est à facteurs complémentaires : pour utiliser plus de travail il faut aussi utiliser plus de capital. [1]

La production est nécessairement positive et quand on utilise ni travail ni capital, la quantité produite est nulle.

Mathématiquement cela veut dire que  $Q = 0$  quand  $N = 0$  et  $K = 0$  et  $Q, N, K$  positifs ou nuls.

La seule partie de la fonction de production qui intéresse le producteur est celle pour laquelle, la production augmente lorsque la quantité de l'un ou/et de l'autre facteur augmente. A quoi servirait-il d'utiliser plus de travail ou de capital si cette utilisation réduisait le résultat obtenu.

Mathématiquement cela veut dire que la fonction « utile » est croissante avec les quantités de travail et de capital.

On peut aussi penser que le plus souvent la production rencontre des limites. Il est difficile de concevoir que l'efficacité des facteurs de production est toujours croissante. Tôt ou tard, l'utilisation de plus de travail ou de capital devient moins efficace ou même inefficace, c'est à dire entraîne une augmentation de la production moins importante ou même une diminution de la production. Cette interrogation sur ce qui se passe « à la marge » est fondamentale dans l'étude des fonctions de production, elle renvoie aux notions de coût marginal et de productivité marginale.

Ce paragraphe contient l'une des plus célèbres lois de l'économie, la loi des rendements décroissants.

En augmentant la quantité utilisée d'un facteur, celle de l'autre restant fixe, on obtient une quantité supplémentaire de produits de moins en moins grande (la production augmente, mais de moins en vite).

Cette loi s'explique principalement par le fait que l'un des facteurs restant fixe, il bloque la possibilité d'utiliser

toujours plus efficacement l'autre facteur.

Au niveau macroéconomique, si un facteur de production existe en quantité limitée, la croissance économique mesurée par l'augmentation du produit par tête, s'arrête fatalement sous l'effet de la loi des rendements décroissants. Ainsi pour les économistes classiques qui considéraient que la richesse est obtenue à partir de trois facteurs, la terre, le travail et le capital, la croissance économique est un cheminement vers un état stationnaire, situation dans laquelle il n'est pas possible d'augmenter le produit par tête, parce que les ressources naturelles (la terre) existe en quantité limitée.

On remarquera que la loi des rendements décroissants d'un facteur de production ne repose pas nécessairement sur l'idée que ce facteur est intrinséquement de moins en moins efficace. Le rendement du travail appliqué à la terre diminue même si toutes les terres ont la même fertilité dès lors que la terre cultivable ne peut être étendue lorsqu'on augmente la quantité de travail. Tôt ou tard les travailleurs se génèrent...

Mathématiquement ce qui précède implique une fonction croissante pour chacun des facteurs mais de moins en moins rapidement au fur et à mesure que la quantité utilisée de chaque facteur augmente, l'autre restant fixe.

Cette remarque porte sur l'efficacité de chaque facteur (rendement factoriel). Si l'on intéresse aux effets d'une augmentation simultanée (proportionnelle) des quantités des deux facteurs on aborde une autre question : que se passe-t-il quand on change l'échelle de la production ?

Le doublement de la quantité de travail et de la quantité de capital peut permettre d'obtenir :

- deux fois plus de produits
- plus de deux fois plus de produits
- moins deux fois plus de produits

Les économistes disent que les « rendements d'échelle » sont respectivement : constants, croissants ou décroissants.

L'observation montre que les entreprises sont confrontées aux trois cas de figure.

Lorsque les rendements d'échelle sont croissants l'entreprise devient un monopole, puisque la grande taille entraîne une plus grande efficacité, et comme toutes les activités économiques ne deviennent pas monopolistiques cela veut dire que les rendements d'échelle ne sont pas toujours croissants.

À l'inverse il est évident que certaines activités ne deviennent rentables que lorsque certains seuils sont franchis. Les entreprises plus grandes bénéficient d'économie d'échelle (elles sont plus efficaces) parce qu'elles peuvent répartir les dépenses indépendantes de la quantité produite (les coûts fixes) sur une plus grande quantité de produits, parce qu'elles accèdent dans de meilleures conditions au financement, parce qu'elles peuvent plus aisément faire des investissements immatériels..

Au plan macroéconomique qu'en est-il pour la fonction de production agrégée ?

Accepter l'idée de rendements d'échelle croissants c'est se placer dans une économie soumise à la concurrence imparfaite, qui est un mode d'organisation de l'économie non optimal socialement et économiquement (les entreprises disposent d'un pouvoir de marché leur permettant de réaliser des profits « anormaux » c'est à dire obtenu aux dépens des autres agents).

C'est pour cette raison que la fonction de production agrégée est supposée connaître des rendements d'échelle non croissants (décroissants ou constants).

Mathématiquement le type de rendements d'échelle correspond au degré d'homogénéité d'une fonction.

Le degré d'homogénéité d'une fonction  $Q = f(K, N)$  se mesure à partir de l'expression suivante pour  $m > 0$  :

homogénéité de degré $h$	$f(mK, mN)$	=	$m^h \cdot f(K, N)$
--------------------------	-------------	---	---------------------

## Fonction de production et contribution des facteurs à la croissance du PIB

homogène de degré = 1 ou rendements constants	$f(mK, mN)$	=	$m \cdot f(K, N)$
homogène de degré < 1 ou rendements décroissants	$f(mK, mN)$	<	$m \cdot f(K, N)$
homogène de degré > 1 ou rendements croissants	$f(mK, mN)$	>	$m \cdot f(K, N)$

**Un des avantages des fonctions homogènes de degré 1 est qu'elles permettent une transformation intéressante :**

si une fonction  $Q = f(K, N)$  est homogène de degré 1 alors

$$Q/N = f(1, K/N)$$

**Dans l'hypothèse de rendements constants, le produit par tête (la productivité du travail) est fonction de capital par tête.**

En 1928, deux économistes américains **James Cobb** et **Paul Douglas** proposent de retenir comme fonction de production agrégée pour l'économie américaine l'expression suivante :

$$Q = A \cdot K^a \cdot N^b$$

avec **A**, **a** et **b** des paramètres positifs

### Étude de la fonction Cobb-Douglas

- Qu'en est-il des rendements d'échelle ?

$$A \cdot (mK)^a \cdot (mN)^b = m^{(a+b)} \cdot A \cdot K^a \cdot N^b$$

- si  $a + b = 1$  les rendements d'échelle sont constants
- si  $a + b < 1$  les rendements d'échelle sont décroissants
- si  $a + b > 1$  les rendements d'échelle sont croissants

- Qu'en est-il des rendements factoriels ?

Travail		Capital	
Productivité moyenne	Productivité marginale	Productivité moyenne	Productivité marginale
$A \cdot K^a \cdot N^{(b-1)} > 0$	$b \cdot A \cdot K^a \cdot N^{(b-1)} > 0$	$A \cdot K^{(a-1)} \cdot N^b > 0$	$a \cdot A \cdot K^{(a-1)} \cdot N^b > 0$
décroissante si $b < 1$	décroissante si $b < 1$	décroissante si $a < 1$	décroissante si $a < 1$

Remarque : les rendements d'échelle peuvent être croissants avec des rendements factoriels décroissants pour les deux facteurs puisque  $a$  et  $b$  peuvent être inférieurs à 1 sans contradiction avec la condition  $(a + b) > 1$

- Cas particulier :  $Q = A \cdot K^a \cdot N^{(1-a)}$

Travail		Capital	
Productivité moyenne	Productivité marginale	Productivité moyenne	Productivité marginale
$A \cdot (K/N)^a > 0$	$(1-a) \cdot A \cdot (K/N)^a > 0$	$A \cdot (K/N)^{(1-a)} > 0$	$a \cdot A \cdot (K/N)^{(1-a)} > 0$

- **Que représentent les paramètres  $a$  et  $(1 - a)$  dans cette fonction ?**

Si on suppose que la rémunération des facteurs est égale à leur productivité marginale, ce qui correspond à l'idée qu'une unité de facteur supplémentaire reçoit une rémunération équivalente à sa contribution à l'augmentation de la valeur de la production, alors avec  $\hat{A}$  «  $ck$  » pour le prix du capital et  $\hat{A}$  «  $p$  » pour le prix de la production :

- Dire que la productivité marginale du capital est égale à la rémunération réelle unitaire du capital, implique :
  - $a \cdot A \cdot (K/N)(1 - a) = ck / p$
  - soit  $(a) \cdot [A \cdot (K/N)(1 - a)] = ck / p$
  - et comme  $[A \cdot (K/N)(1 - a)]$  n'est autre que la productivité moyenne du capital soit  $Q / K$
  - on en déduit que  $(a) \cdot Q / K = ck / p$
  - soit  $a = [(ck) \cdot K] / p \cdot Q$

ce qui signifie que le coefficient  $\hat{A}$  «  $a$  » mesure la part de la rémunération totale du capital dans la valeur de la production

donc de la même manière le coefficient  $\hat{A}$  «  $(1 - a)$  » mesure la part de la rémunération totale du travail dans la valeur de la production.

- **Comment interpréter  $\hat{A}$  «  $A$  »**

$\hat{A}$  «  $A$  » intervient comme un coefficient multiplicateur appliqué à l'expression  $Ka \cdot Nb$  pour obtenir la production  $Q$ . Si  $\hat{A}$  «  $A$  » augmente cela signifie que la production augmente sans qu'il soit nécessaire d'augmenter la quantité de travail et/ou de capital, autrement dit, l'augmentation de  $\hat{A}$  «  $A$  » est une augmentation de l'efficacité de la production.

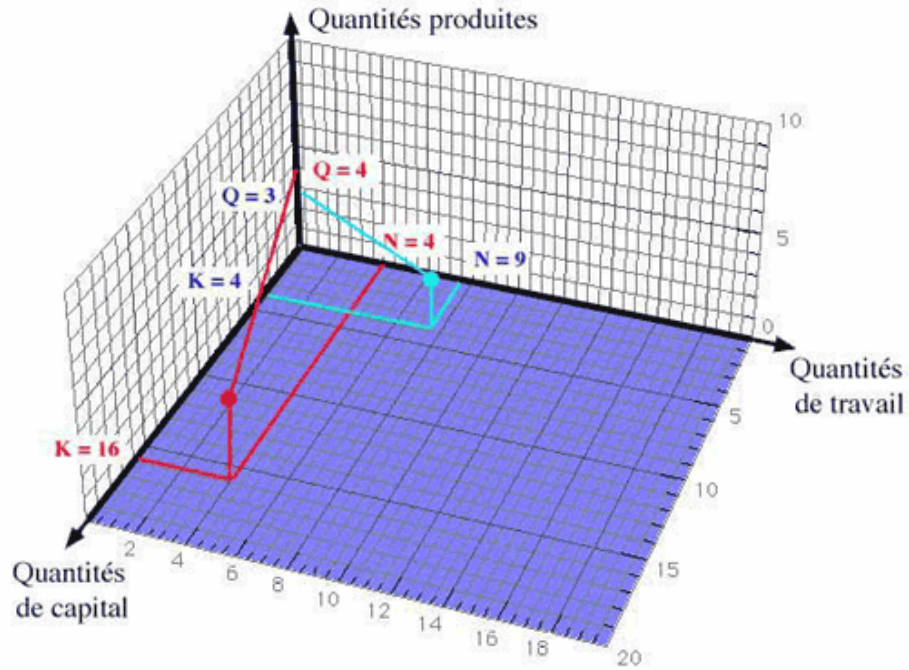
Il y a deux manières de faire varier la production :

- en augmentant les quantités  $K$  et  $N$  de capital et de travail : c'est un déplacement le long de la fonction  $Q = A \cdot Ka \cdot Nb$
- en augmentant  $A$  : c'est un déplacement de la fonction puisque  $Q = A \cdot Ka \cdot Nb$  devient  $Q = A' \cdot Ka \cdot Nb$  avec  $A' > A$

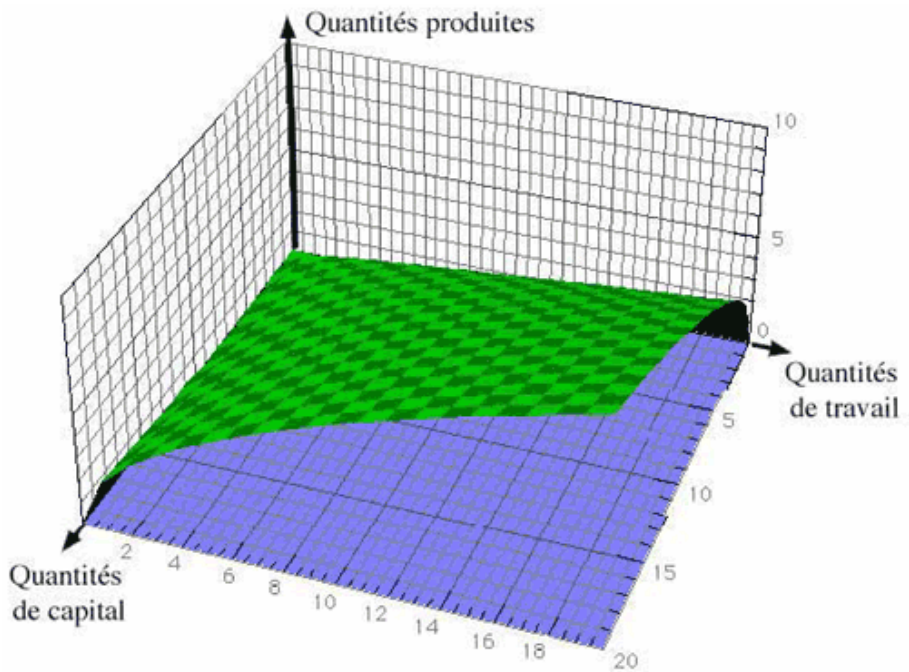
Dire que  $\hat{A}$  «  $A$  », peut varier oblige à considérer que la production est mesurée à des dates différentes  $\hat{A}$  «  $A$  » étant l'influence d'un état donné de la technologie.

**Lorsqu'il y a un changement technologique, un progrès technique,  $\hat{A}$  «  $A$  » augmente.**

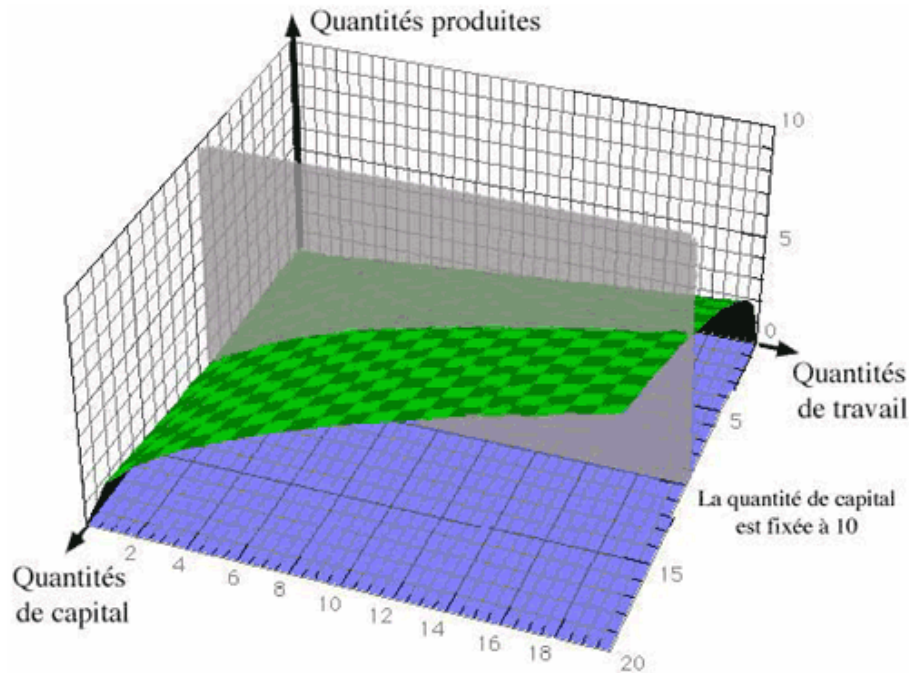
**Représentation graphique de la fonction  $Q = 0,5 K^{0,5} N^{0,5}$**



Ensemble des points correspondant à la fonction pour K et N variant de 0 à 20



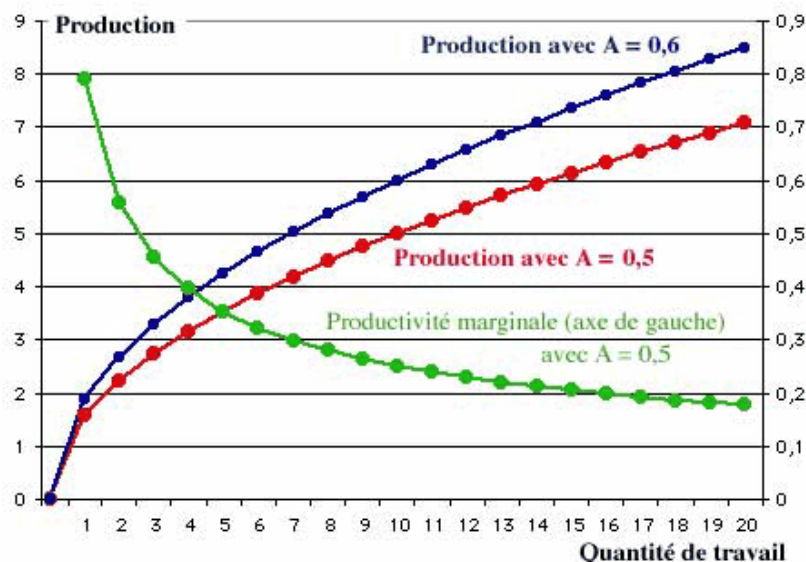
Production variant avec la quantité de travail pour une quantité de capital donnée, ici  $K = 10$



## Représentation de la production pour $K = 10$ et $N$ variant de 0 à 20

Deux valeurs pour le coefficient  $\hat{A}$  «  $A$  » (progrès technique)

Un progrès technique plus intense augmente la production en déplaçant la fonction vers le haut



## Analyse économétrique des contributions à la croissance de la production

La démarche économétrique est utilisée en premier lieu par l'économiste américain Denison [2], elle sera reprise pour la France par des économistes de l'INSEE et prolongée par plusieurs articles et ouvrages de Angus Maddison. [3]

La démarche est toujours inspirée par l'idée que la croissance de la production s'explique par les contributions des facteurs de production à la réalisation de cette production.

Il faut donc partir d'une fonction de production, c'est à dire d'une liaison statistique entre la quantité produite et les



quantités des facteurs utilisés pour produire.

Au plan macroéconomique une telle fonction est forcément une relation entre la production, le travail et le capital reconstruite à partir d'une analyse économétrique. Les données disponibles sont mal adaptées à ce type de recherche, elles font donc l'objet d'un traitement préalable. C'est dans la construction des séries de travail et de capital que le biais idéologique peut s'introduire : comment apprécier la qualité du travail ? comment mesurer le stock de capital ?

Dans l'étude de Carré-Dubois-Malinvaud, la fonction de production retenue est une fonction de Cobb-Douglas.

La fonction de Cobb-Douglas (1928) est une fonction à facteurs substituables utilisée parce qu'elle permet d'envisager facilement des situations de rendements d'échelle croissants, ou non croissants.

$Q = A K^b L^a$  dans laquelle  $a$  et  $b$  sont des paramètres positifs et  $a + b$  mesure le degré d'homogénéité de la fonction.

Pour que les rendements soient constants il faut que  $a + b = 1$  donc  $b = (1 - a)$

La valeur de  $a$  n'est pas difficile à déterminer comme il a été montré plus haut (si les hypothèses néo-classiques habituelles sont retenues) : le coefficient  $a$  mesure la part des salaires dans la production.

### On montre facilement que la croissance de la production s'exprime relativement à la croissance des quantités de travail et de capital.

Il est alors très facile de raisonner en termes de contributions des facteurs. La croissance de la production est une somme pondérée de la croissance de la quantité de travail employée, de la quantité de capital utilisée, et d'un ensemble d'effets non liés à la variation des quantités de facteurs. Les deux premières composantes relèvent de la croissance extensive, la dernière de la croissance intensive. Cette dernière partie ne peut se mesurer que comme un résidu statistique.

Cette difficulté conceptuelle a déjà été exposée à l'occasion de l'examen des différentes mesures de la productivité.

Taux de croissance de la production	Contribution du facteur travail	Contribution du facteur capital	Contribution du Progrès technique
↓	↓	↓	↓
$\frac{dQ_t}{Q_t}$	$a \frac{dL_t}{L_t}$	$(1 - a) \frac{dK_t}{K_t}$	$\frac{dA_t}{A_t}$
$= a \frac{dL_t}{L_t} + (1 - a) \frac{dK_t}{K_t} + \frac{dA_t}{A_t}$			

La délimitation des contributions respectives dépend de ce que les économistes peuvent repérer dans la mesure de la quantité du facteur.

- Pour le travail l'aspect purement quantitatif est estimé à partir de l'évolution de la population active occupée (déterminée elle-même en tenant compte de la structure par âge et par sexe et des taux d'activité par âge et par sexe, mais aussi du chômage) et de la durée annuelle du travail. L'appréciation de la qualité du travail dans cette étude, dépend des productivités par secteur, par âge et par sexe (celles-ci sont estimées par les salaires conformément à l'enseignement néo-classique).
- Pour le capital il faut retenir une estimation du stock de capital fixe net. Au plan qualitatif on peut penser que la productivité du capital dépend de son "âge" (le rajeunissement du capital a donc un effet positif sur la croissance).
- Carré-Dubois-Malinvaud intègrent en plus une composante traduisant l'intensité de la demande pour tenir compte des variations conjoncturelles mais cette composante joue faiblement.

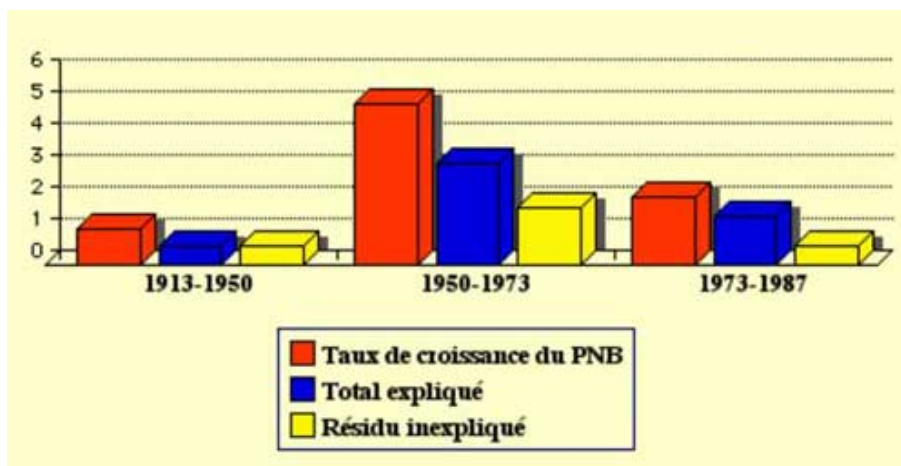


Les résultats de cette recherche économétrique sont étonnants :

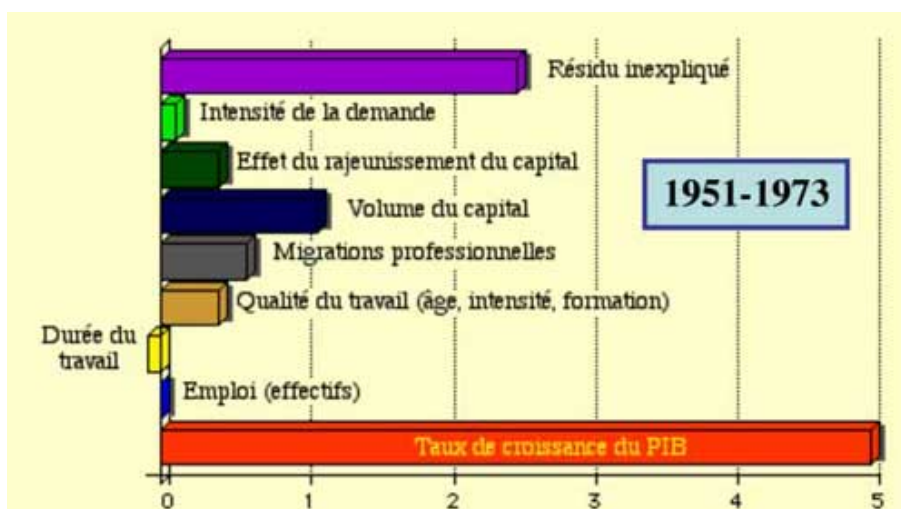
- En 1957 **Robert Solow** estime que 90% de la croissance aux USA pendant la période 1909-1949 ne serait pas imputable au travail et au capital !
- **P. Denison** relativisa ce constat en 1976 en essayant de prendre en compte la qualité du travail et du capital, pour conclure cependant à une contribution importante du "facteur résiduel"
- En France, en 1972, **Jean-Jacques Carré, Paul Dubois et Edmond Malinvaud** concluent à une contribution allant de 0,85% à 3,1% de croissance selon les périodes, et plus de 2% pour 1951-1973
- Paul Dubois a publié d'autres résultats pour la période 1896 - 1984 : pour chaque période la taille du résidu inexpliqué est importante. Pour 1929-1951 et 1973-1984 elle représente une croissance égale à celle du PIB !!

La croissance de l'économie française

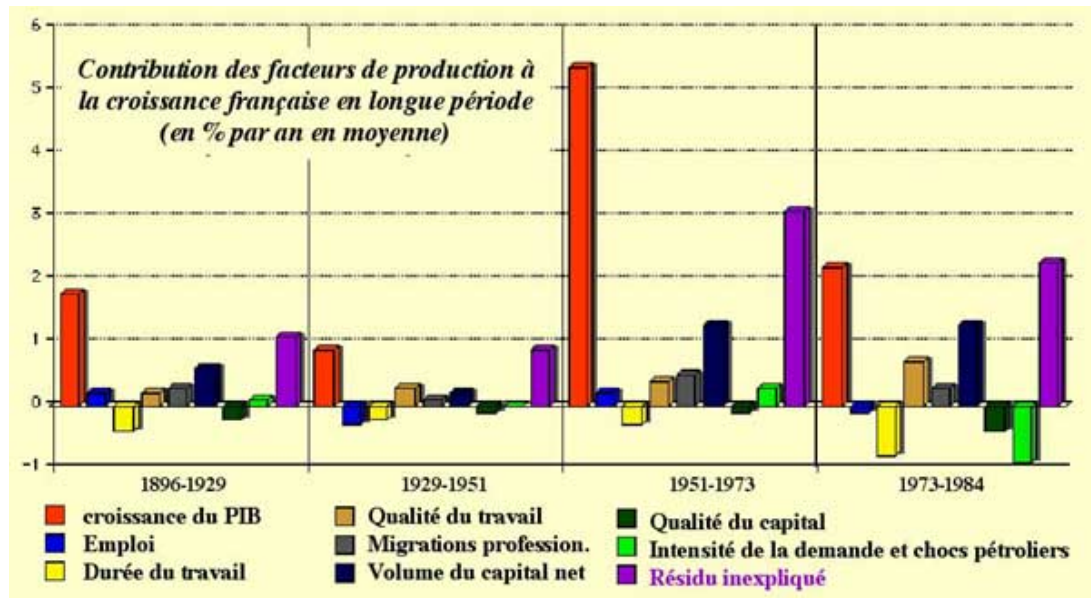
## 1) Denison 1976



## 2) Carré - Dubois - Malinvaud 1972



## 3) Dubois 1985



La critique méthodologique de ce type d'exercice est relativement simple.

Les résultats dépendent entièrement des hypothèses.

La fonction de production de Cobb-Douglas est indispensable pour que l'on puisse retrouver une signification immédiate pour le coefficient  $\alpha$  et celui-ci ne peut être calculé sans faire référence à une analyse particulière des salaires.

Il en va de même des méthodes utilisées pour repérer les aspects qualitatifs du travail.

Il ne faut pourtant pas considérer que les auteurs de recherches de ce type sont irréalistes.

Au contraire ils sont parfaitement conscients des limites de leur tentative d'explication et ils concluent le plus souvent en rappelant le rôle essentiel des facteurs d'environnement de la croissance. Ces sont ces facteurs qui permettent d'expliquer la taille du résidu : place de l'État, ouverture des économies, développement de la recherche, économies d'échelle autorisées par une meilleure organisation...

La méthode a d'ailleurs conservé sa séduction, puisque les économistes d'aujourd'hui continuent de l'utiliser.

[1] C'est cette distinction entre substitution et complémentarité qui séparent les analyses de la croissance néo-classiques introduites par Solow et celles des économistes keynésiens (Harrod - Domar).

[2] D'abord dans un rapport officiel publié en 1962 "The source of economic growth" puis dans un ouvrage célèbre publié en 1967 sous le titre "Why growth-rates differ" en collaboration avec Poullier.

[3] **Edmond Malinvaud**, **Paul Dubois** et **Jean-Jacques Carré**, "La croissance française, un essai d'analyse causale" Le Seuil, 1962 ; **Angus Maddison** a rédigé un "survey" sur ces approches économétriques de la croissance dans le "Journal of economic literature", il a aussi publié un ouvrage de référence sur ce thème "les phases du développement capitaliste" Economica 1981.