# Des rectangles qui ne manquent pas d’aire

## Phase n°1 : recherche par deux

Le-a prof. demande aux élèves de préparer leur matériel usuel de géométrie (crayon, gomme, compas, règle graduée, équerre, ciseaux, ruban adhésif, ficelle…), puis distribue la feuille (annexe 1) et donne la consigne suivante, sans commentaire : « Quelle est la figure la plus petite ? Quelle est la figure la plus grande ? ».

Les élèves cherchent par deux.

A la fin de la recherche, ils doivent écrire sur une feuille A3 leurs réponses et leurs explications.

## Phase n°2 : mise en commun

Les groupes de deux exposent tour à tour leurs réponses et leurs arguments. Certaines procédures de comparaison des aires (par estimation perceptive, par comparaison de couples de dimensions des rectangles) doivent pouvoir être déclarées non valides à cause de leur imprécision. D’autres sont acceptées. On aboutit au constat que le rangement n’est pas le même suivant le critère qu’on prend.

## Phase n°3 : recherche par deux

Le-a prof. demande aux élèves de découper les trois rectangles suivant leur contour et donne la tâche suivante : « Audrey a le rectangle A, Bastien a le rectangle B, Caroline a le rectangle C ; Quel enfant a le plus de papier ? Quel enfant a le moins de papier ? »

Après recherche de quelques minutes, les élèves écrivent leur réponse et leurs explications sur une feuille A3.

## Phase n°4 : mise en commun

Les élèves exposent ce qu’ils ont fait. Toutes les procédures de comparaison autres que celles de l’aire sont invalidées parce qu’elles ne correspondent pas à la quantité de papier. On aboutit à une conclusion du type : «  C utilise le moins de papier, B utilise le plus de papier. »

Le-a prof. ajoute que : «  C a l’*aire* la plus petite ; B a l’aire la plus grande » et fait expliciter des arguments tels que : « parce qu’on peut faire rentrer le rectangle C sur le rectangle A et sur le rectangle B et «  parce qu’on peut faire rentrer le rectangle A sur le rectangle B. » Ceci constitue la trace écrite, à côté des rectangles qui sont collés.

## Phase n°5 : recherche par deux

Le-a prof. distribue la feuille (annexe 2) et demande de découper les rectangles selon leur pourtour, puis pose la question suivante : « Quel est le rectangle qui a la plus grande aire ? Quel est le rectangle qui a la plus petite aire ?». Il peut reformuler la question en utilisant l’expression « quantité de papier ». Chaque groupe doit écrire sa réponse sur une grande feuille, ainsi que son explication.

## Phase n°6 : mise en commun

Les feuilles avec les réponses sont affichées et lues, puis les élèves exposent à tour de rôle leur méthode pour trouver leur réponse. Les procédures ne comparant pas les aires sont invalidées parce qu’elles ne comparent pas les quantités de papier. La procédure de décomposition-recomposition sera validée.

La conclusion est clairement explicitée : «  E a l’aire la plus grande parce que D rentre dans E ». C’est la trace écrite qui figure à côté des deux rectangles collés.

## Phase n°6 : recherche par deux

Les élèves ne disposent plus de ciseaux. Le-a prof. distribue la feuille (annexe 3, avec le rectangle F) et une feuille de papier de format A3, puis donne la consigne suivante : «  Le rectangle K vous est donné. Un autre rectangle G a 15 cm de long et 11 cm de large. Qui de F ou de G a la plus grande aire ? »

Après recherche de quelques minutes, les élèves écrivent leur réponse et leurs explications sur une feuille A3.

## Phase n°7 : mise en commun

Les feuilles avec les réponses sont affichées et lues, puis les élèves exposent à tour de rôle leur méthode pour trouver leur réponse. La procédure consistant à dessiner le rectangle G sur le rectangle F doit permettre aux élèves de conclure. La conclusion est explicitée : « Le rectangle G a la plus petite aire parce que G rentre dans F. »

… à poursuivre.

## Annexe 1

**C**

**A**

**B**

## Annexe 2

**D**

**E**

**D**

## Annexe 3

**F**

## Des éléments pour nous

D’après ERMEL, CM1, p. 348…

### Niveau

Cycle 3, plutôt CM1, mais peu être repris en CM2.

### Les programmes

Recherche par « aire »

Les connaissances des grandeurs déjà fréquentées au cycle 2 (longueur, masse, contenance, durée, prix) sont complétées et structurées, en particulier à travers la maitrise des unités légales du SI d’unités (numération décimale ou sexagésimale) et de leurs relations. Un des enjeux est d’enrichir la notion de grandeur en abordant la notion d’aire d’une surface et en la distinguant clairement de celle de périmètre.

La notion de mesure d’une grandeur consiste à associer, une unité étant choisie, un nombre (entier ou non) à la grandeur considérée. Il s’agit de déterminer combien d’unités ou de fractionnements de l’unité sont contenus dans la grandeur à mesurer. Les opérations sur les grandeurs permettent également d’aborder les opérations sur leurs mesures. Les notions de grandeur et de mesure de la grandeur se construisent dialectiquement, en résolvant des problèmes faisant appel à différents types de tâches (comparer, estimer, mesurer).

Dans la continuité du cycle 2, le travail sur l’estimation participe à la validation de résultats et permet de donner du sesn à ces grandeurs et à leur mesure (estimer en prenant appui sur des références déjà construites : longueur et aire d’un terrain de basket, aire d’un timbre, masse d’un trombone, masse et cvolume d’une bouteille de lait…).

Attendus de fin de cycle : comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux (longueur (périmètre), aire, volume, angle ; utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs ; résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux.

…

Les connaissances et compétences visées : 1) comparer, classer et ranger des surfaces selon leurs aires sans avoir recours à la mesure ; 2) différencier aire et périmètre d’une surface ; 3) déterminer la mesure de l’aire d’une surface à partir d’un pavage simple ou en utilisant une formule ;4) estimer la mesure d’une aire par différentes procédures. Situations amenant les élèves à : 1) superposer, découper, recoller des surfaces ; 2) utiliser des pavages afin de mieux comprendre l’action de mesurer une aire. Adapter le choix de l’unité en fonction de l’objet (ordre de grandeur) ou en fonction de la précision souhaitée ou en fonction du domaine numérique considéré.

Tout au long du cycle 3, il convient de choisir la procédure adaptée pour comparer les aires de deux surfaces, pour déterminer la mesure d’une aire, avec ou sans recours aux formules. Dès le CM1, on compare et on classe des surfaces selon leur aire. La mesure ou l’estimation de l’aire d’une surface à l’aide d’une surface de référence ou d’un réseau quadrillé est ensuite est ensuite abordée. Une fois ces notions stabilisées, on découvre et on utilise les unités d’aire usuelles et leurs relations. On peut alors construire et utiliser les formules pour calculer l’aire d’un carré, d’un rectangle, puis en 6e, calculer l’aire d’un triangle rectangle, d’un triangle quelconque… (p 208)

### Les objectifs de la séance

Faire expliciter divers critères de comparaison de rectangles dont celui par les aires. Les faire passer de critères spontanés comme l’estimation perceptive, l’encombrement (la plus grande longueur) ou le périmètre , au critère de comparaison par les aires. Donner du sens au concept d’aire par opposition avec ces autres modes de comparaison des longueurs.

Développer des procédures de comparaison fondées sur des critères mathématiques, mais sans la mesure des aires, c’est-à-dire soit directement, par inclusion d’un rectangle dans un autre, soit indirectement, par décomposition-recomposition effective ou fictive (figurée sur un schéma).

### Les variables didactiques

Ce sont :

* la donnée ou non des dessins des rectangles ;
* les dimensions des rectangles :   
  \* elles sont telles qu’on peut comparer les aires par superposition directe et inclusion ;  
  \* elles sont telles qu’il n’est pas possible de comparer les aires (parce qu’elles sont trop proches) sans décomposer et recomposer les rectangles (à noter que les dimensions sont liées par des relations simples de double, de moitié pour, justement, faciliter les décompositions).
* Les périmètres des rectangles : certains rectangles différents par la forme et l’aire ont pourtant le même périmètre pour qu’il apparaisse que le critère périmètre n’est pas le critère de comparaison des « quantités de papier » ou aires.
* L’utilisation du double-décimètre : elle est possible pour permettre aux élèves de mesurer les longueurs des côtés ou décomposer les rectangles en respectant les longueurs.
* L’utilisation des ciseaux : elle est possible dans les phases 1 et 2 pour favoriser la superposition des rectangles, ainsi que la décomposition en sous-rectangles ; elle n’est plus possible dans les phases 3 et 4.
* L’utilisation du calque : pas permise.

### Les procédures

Comparaison des aires par des procédures perceptives (œil, mesurage) :

* Comparaison visuelle diirecte sans superposition ou découpage ;
* Perception visuelle assistée : superposition d’un rectangle avec une partie d’un autre et comparaison visuelle des parties restantes ;
* Inclusion effective ;
* Décomposition-recomposition effective ;
* Dessin d’un des rectangles sur l’autre.

Comparaison des aires par des procédures plus théoriques, c’est-à-dire fondées sur des propriéts mathématiques, et non sur la perception :

* Inclusion fictive, en prenant appui sur les dimensions ;
* Décomposition-recomposition fictive (par un schéma) ;
* Calcul des aires :  
  \* à partir de la réalisation d’un quadrillage et du dénombrement des carreaux ;  
  \* à partir de la détermination des longueurs, et de leur produit (mais ce n’est ce qui est attendu ici).

Comparaison des longueurs :

* Des plus grandes longueurs de côtés ;
* Des périmètres par report des côtés bout à bout sur une droite et comparaison des longueurs des segments obtenus ;
* Des périmètres par détermination des mesures des côtés, des demi-périmètres ou des périmètres.

### Les dimensions des rectangles

A : 10 x 9 ; B : 10 x 14 ; C : 20 x 4 : A inclus dans B ; C se décompose en 2 rectangles 10 x 4 qui s’incluent dans A  et aussi dans B ; B et C ont même périmètre.

 D : 19 x 8 ; E : 16 x 10 : les aires ne sont pas égales, mais proches 152 et 160 ; la décomposition de D par le milieu en 2 rectangles 8 x 9,5 ou en 2 rectangles 8 x 10  et  8 x 9  prouvent le résultat ; la décomposition de E en 2 rectangles 10 x 8 prouve le résultat ; le rangement selon les aires est contraire au rangement selon les périmètres et selon la plus grande dimension.

F : 15 x 12. ; G est inclus dans F ; H n’est pas inclus dans F, il faut, après superposition, comparer les 2 parties qui dépassent.

### La suite donnée dans ERMEL

Phase 8  – Recherche par deux : distribution du rectangle F sur une feuille, nouveau problème : «  Le rectangle F vous est donné, ainsi qu’un carré H de 13 cm de côté ; qui de F ou de H a la plus grande aire ? »

Phase 9 – Mise en commun : les procédures possibles sont la décomposition-recomposition sur schéma ou le calcul des aires à partir d’un quadrillage. On conclut que H a la plus grande aire.

Phases 10 et 11  – Recherche par deux, en deux étapes (M et N, puis M et P) : les rectangles sont donnés uniquement par leurs dimensions ; rectangle M de 50 x 20, rectangle N de 40 x 20, rectangle P de 40 x 30. On peut comparer M et N par inclusion fictive (de même pour N et P), mais il est nécessaire d’utiliser la décomposition fictive pour comparer M et P.