

Animation pédagogique CYCLE 3

Mathématiques: numération



05/10/2011

Catherine Lavergne IEN USSEL

Sommaire

- Les évaluations nationales
- Quelques rappels théoriques
- La notion de rationnel
- Les fractions dans les programmes
- Les décimaux dans les programmes

05/10/2011

Catherine Lavergne IEN USSEL



LES ÉVALUATIONS NATIONALES

05/10/2011

Catherine Lavergne IEN USSEL



Les évaluations 2009 (fractions)

- Ecrire: $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{3}{100}$ $\frac{19}{10}$
- Résoudre un problème de proportionnalité:

Pour 6 personnes:	
250g de farine	$\frac{9}{6}$
1l de lait	$\frac{6}{6}$
4 œufs	
1 cuillère à soupe d'huile	
2 pincées de sel	
 Pour 9 personnes?	

05/10/2011

Catherine Lavergne IEN USSEL

Les évaluations 2009(décimaux)

- Ecrire 29,3 / 58,75
- Passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale: 0,2 / 0,005 / 1,9
- Multiplier par un décimal: $8 \times 0,1$ / $2 \times 0,25$
- Comparer: 140,5 et 155 / 0,8 et 1,4
- Encadrer à l'unité: 101,5 et 20,6
- Placer sur une droite graduée: 7,5 / 3,4 / 15,9
- Addition d'un entier et d'un décimal
- Soustraction de deux décimaux
- Multiplication d'un décimal par un entier
- Division: quotient décimal de 2 entiers et d'un décimal par un entier
- Problème: calcul d'un périmètre (conversion)

05/10/2011

Catherine Lavergne IEN USSEL

Les évaluations 2010

■ Ecrire: $\frac{25}{100}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{38}{100}$ $\frac{1}{2}$

- Résoudre un problème de proportionnalité:

Pour 4 coupes:

100g de chocolat

2 œufs

30 g de sucre

Pour 10 coupes?

$$\frac{10}{4}$$

05/10/2011

Catherine Lavergne IEN USSEL



- Passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale: $0,38 / 0,2 / 0,25/0,5$
- Multiplier par un décimal: $1,5 \times 4 / 2 \times 0,25$
- Comparer: $234,8$ et $238 / 0,6$ et 1
- Encadrer à l'unité: $505,14$ et $60,2$
- Placer sur une droite graduée: $2,6 / 6,2 / 8,9/0,5$
- Addition de deux décimaux
- Soustraction de deux décimaux
- Multiplication d'un décimal par un entier
- Division: quotient décimal de 2 entiers
- Problème: grandeurs et mesures

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



Les évaluations 2011

- Ecrire: $28,07$; $0,35$ ou $\frac{35}{100}$; $0,3$ ou $\frac{3}{10}$
Items 65 66 67 68
- Passer d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire $6,02 \rightarrow$
- Passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale $\frac{3}{10} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow$

Les résultats USSEL:

65	66	67	68
50,0%	68,2%	63,6%	9,1%

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



- Comparer 180,5 et 185 ; 0,6 et 1,2 item 69
- Estimer l'ordre de grandeur d'un résultat 15,2x21 item 69
- Additionner un entier et un décimal: 208+13,75 item 81
- Soustraire 2 décimaux: 56,73-7,02 item 82
- Multiplier un décimal par un entier: 46,3x3 item 84
- Division de 2 entiers avec quotient décimal 238:4 item 86
- Calculer mentalement une opération: 8,3x5 item 94

Les résultats USSEL

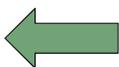
69	81	82	83	84	86	94
72,7%	72,7%	90,9%	81,8%	50,0%	9,1%	59,1%

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



Des erreurs relevées

- $\frac{35}{100}$ écrit 0,035
- $\frac{3}{10}$ écrit 3,1 ou 0,03 ou 3,0
- 6,02 -> $\frac{62}{10}$
- $\frac{1}{4}$ écrit 0,1 ou 0,001 ou 2,2 ou 3,5 ou 3, $\frac{0}{4}$ ou 1 ou 4,1 ou 3 ou 1,4

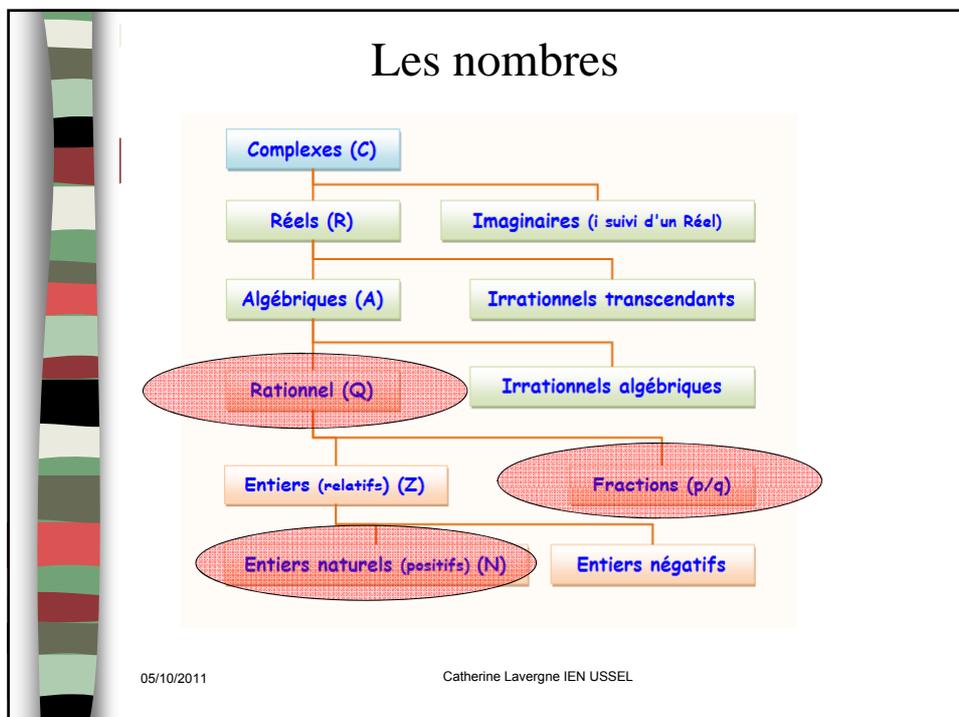


05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



QUELQUES RAPPELS THÉORIQUES

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



Les nombres

ENTIERS

DECIMAUX

RATIONNELS

IRRATIONNELS

$\frac{2}{3}$ $-\frac{7}{8}$ π $\sqrt{2}$ $-\sqrt{2}$
 $\frac{4}{7}$ $0,001$ $-3,14$ $\frac{7}{5}$ -15 0 $\frac{4}{2}$ $\frac{8}{100}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
 $57,5$ 457 $\sqrt{4}$ $-\sqrt{3}$ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\sqrt{5}$

- Les **nombre entiers naturels** sont les nombre entiers positifs.
- Les **nombre décimaux** ont une écriture décimale admettant un nombre fini de chiffres (autres que zéro) après la virgule
- Les **nombre rationnels** peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient de deux nombre entiers relatifs .
- Les **nombre irrationnels** sont les nombre qui ne sont pas rationnels.

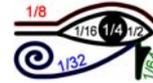
05/10/2011
Catherine Lavergne IEN USSEL

Les rationnels \mathbb{Q} (Les fractions)

05/10/2011
Catherine Lavergne IEN USSEL

Histoire: un concept qui a beaucoup évolué depuis son invention.

Les fractions **unitaires** des Égyptiens antiques sont très simples à comprendre.



Au XVI^{ème} siècle, Simon Stévin met au point un système proche de l'écriture à virgule pour les décimaux.



La virgule décimale fut introduite par Bartholomäus Pitiscus dans ses tables trigonométriques (1612).

05/10/2011

Catherine Lavergne IEN USSEL

- En revanche, **la notion de rationnel** est devenue aujourd'hui extrêmement complexe parce **qu'un même nombre rationnel** permet de rendre compte d'opérations mentales très diverses.

05/10/2011

Catherine Lavergne IEN USSEL

Définition

- Un nombre est rationnel s'il peut s'écrire sous la forme du quotient de 2 entiers.

- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$

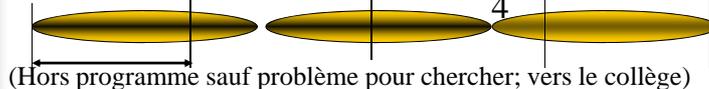
05/10/2011

Catherine Lavergne IEN USSEL

Le notion de fraction

La notion de *rationnel*/Les fractions et la division

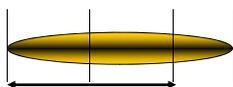
3 baguettes divisées par 4 : $\frac{3}{4}$ de baguette



(Hors programme sauf problème pour chercher; vers le collège)

Les fractions sont envisagées dans le cadre d'un *fractionnement* de l'unité.

1 baguette divisée en 4 parts égales: $\frac{3}{4}$ de baguette



05/10/2011

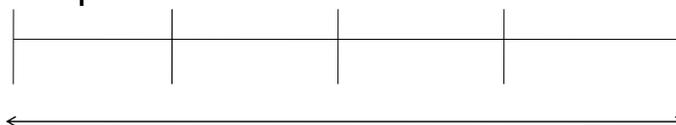
Catherine Lavergne IEN USSEL

Notion de rationnel

- Un nombre renvoie à une grandeur alors que l'autre est sans unité: **division-partition**.

3 m divisé en 4 parties égales.

$$\frac{3}{4}$$



05/10/2011

3m

Catherine Lavergne IEN USSEL

Notion de rationnel

- Les nombres renvoient à des grandeurs de nature différente: **une grandeur quotient**

$\frac{3}{4}$: cela se lit 3 pour 4.

Exemples:

- 3 cas de maladie pour 4 milliers d'habitants (**notion de proportion**).
- Une vitesse 3 km en 4 h
- Un rendement 3 hl d'alcool pour 4t de raisin....

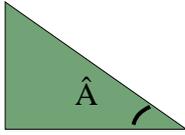
05/10/2011

Catherine Lavergne IEN USSEL

Notion de rationnel

- Les nombres renvoient à des grandeurs de même nature et la fraction désigne **un rapport**; cette fraction renvoie à une **division-quotition**.

$$\text{tangente en } \hat{A} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent.}} = \frac{3}{4} \begin{matrix} 3 \text{ cm} \\ \triangle \\ 4 \text{ cm} \end{matrix}$$





05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL

LES FRACTIONS DANS LES PROGRAMMES

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



Les fractions dans les programmes

- Au CM, **les fractions** apparaissent comme de **nouveaux nombres** utiles pour résoudre des problèmes afin de pallier l'insuffisance des entiers, notamment pour **des partages, des mesures de longueurs et d'aires et pour repérer des points sur une demi-droite graduée.**

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



Les fractions (programmes 2008)

- **Fractions simples et décimales :** écriture, encadrement entre deux nombres entiers consécutifs, écriture comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1, somme de deux fractions décimales ou de deux fractions de même dénominateur ;

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



Fractions:

CM1	CM2
<ul style="list-style-type: none"> - Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième. - Utiliser, ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs. 	<ul style="list-style-type: none"> - Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs. - Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. - Ajouter 2 fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur.

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



Les fractions

- Les connaissances relatives à ces nouveaux nombres peuvent être travaillées dans différents champs disciplinaires: sciences , technologie, géographie ...
- Vidéo la fusée à eau

Séance découverte :00.00 à 5.17



05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL

Nouveaux nombres

Les notions doivent être découvertes avec du “matériel” et par la “manipulation” concrète de bandelettes, disques, segments, demi droite

- Les fractions usuelles < à l'unité

Séance : 5.17 à 13.46



- Les fractions usuelles > à l'unité

- Egalité / décomposition des fractions

- Les fractions décimales

05/10/2011

Catherine Lavergne IEN USSEL



Des nouveaux nombres:
Les Fractions.

1 unité

unité divisée en deux parties égales $\frac{1}{2}$

unité divisée en quatre parties égales $\frac{1}{4}$

unité divisée en huit parties égales $\frac{5}{8}$

5 ← numérateur
8 ← nombre de parties
dénominateur: colonnes / considérées
nombre de parties
égales dans l'unité

$\frac{5}{8}$ se lit cinq huitièmes

05/10/2011

Les fractions usuelles > à l'unité

$\frac{10}{8} = \frac{8}{8} + \frac{2}{8} = 1 + \frac{1}{4}$
 $\frac{5}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$
 $\frac{3}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$
 $\frac{7}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$...
 $\frac{13}{8} = \frac{8}{8} + \frac{5}{8} = 1 + \frac{5}{8}$
 $\frac{17}{8} = \frac{16}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{1} + \frac{1}{8} = 2 + \frac{1}{8}$

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL

Décomposition des fractions: partie entière partie fractionnaire

Les fractions égales

$\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5} = \frac{12}{10} = 1 + \frac{2}{10}$
 $\frac{25}{10} = 2 + \frac{5}{10} = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$
 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
 $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$
 $\frac{18}{10} = \frac{9}{5}$
 $1 = \frac{5}{5} = \frac{10}{10} = \frac{2}{2}$

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL

Les fractions décimales

$$\frac{23}{10} = \frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{3}{10} = 2 + \frac{3}{10}$$

Les fractions décimales:
 — les dixièmes
 — les centièmes

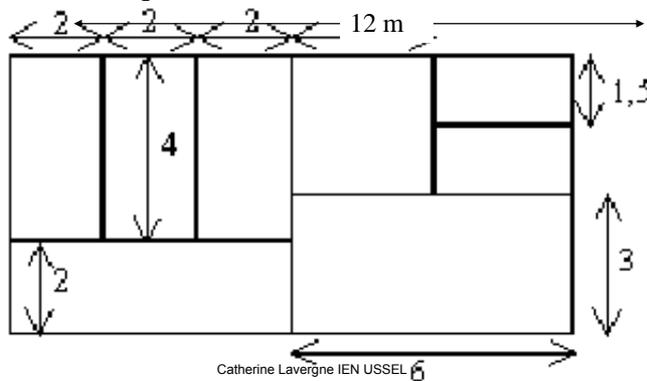
$$1 = \frac{10}{10} = \frac{100}{100}$$

Décomposition $\frac{192}{100} = \frac{100}{100} + \frac{90}{100} + \frac{2}{100}$

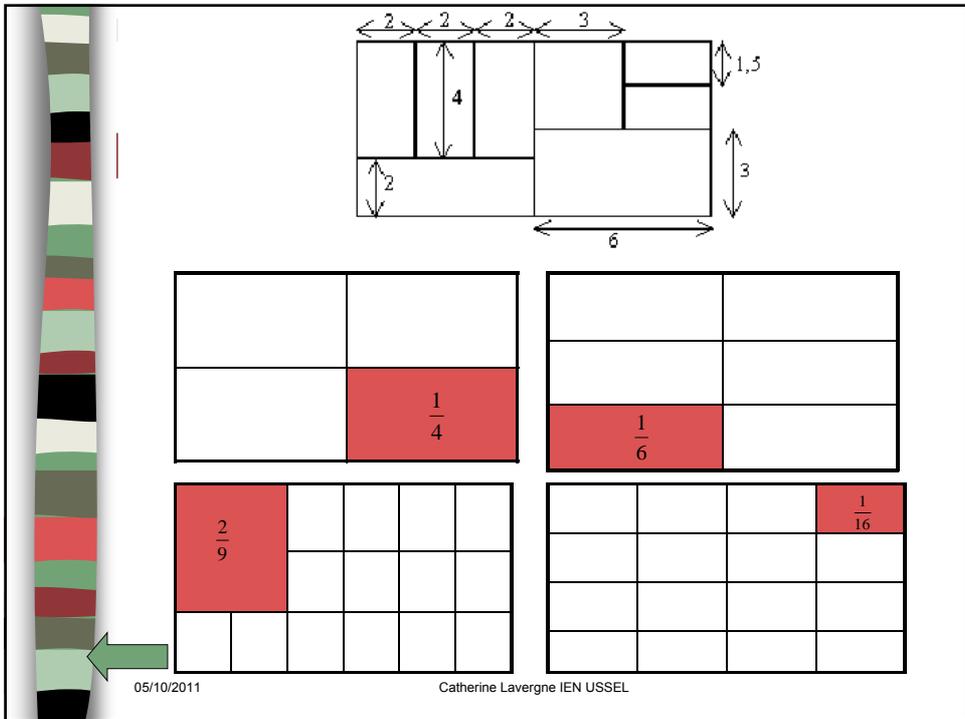
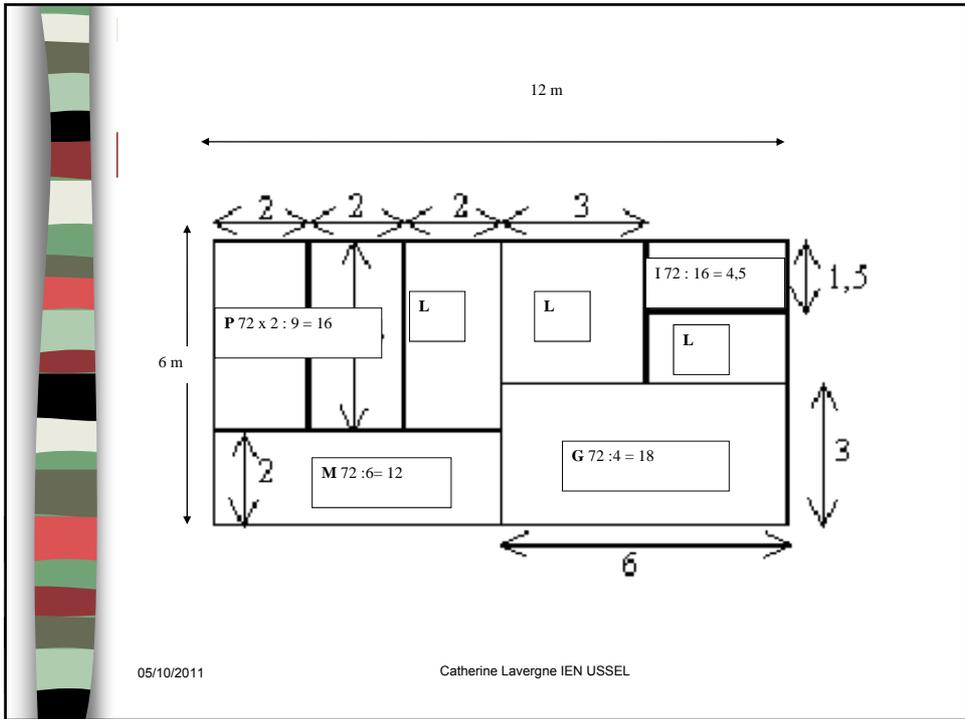
05/10/2011

Problème de recherche

Voici le plan d'un parterre dans lequel vous devez placer des fleurs. Les mesures sont exprimées en mètre. Il faut que les marguerites occupent $\frac{1}{6}$ du parterre; les géraniums $\frac{1}{4}$ du parterre; les pétunias $\frac{2}{9}$; les iris $\frac{1}{16}$ et les lys la place restante. Ecrivez dans chaque case l'initiale du nom de la fleur.



05/10/2011





NUMÉRATION:

Les décimaux

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



Rappels mathématiques

- Un nombre est décimal s'il peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.
- $D = \{a/10^n / a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



Deux conceptions erronées

- Conception N

L'élève traite les nombres décimaux comme des entiers sans tenir compte de la virgule.

- Conception NN

L'élève traite les parties entières et décimales comme des entiers.

05/10/2011

Catherine Lavergne IEN USSEL



Quelles conséquences?

- En supposant que les élèves aient des conceptions stables.

Fiche exercices

05/10/2011

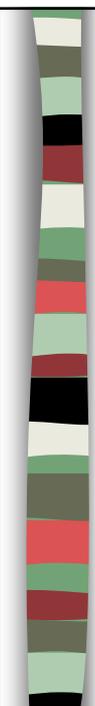
Catherine Lavergne IEN USSEL



9,75 + 6,8

<p>■ Noémie</p> $\begin{array}{r} 9,75 \\ + 6,8 \\ \hline 1,043 \end{array}$	<p>■ Paul</p> $\begin{array}{r} 9,75 \\ + 6,8 \\ \hline 15,83 \end{array}$
--	--

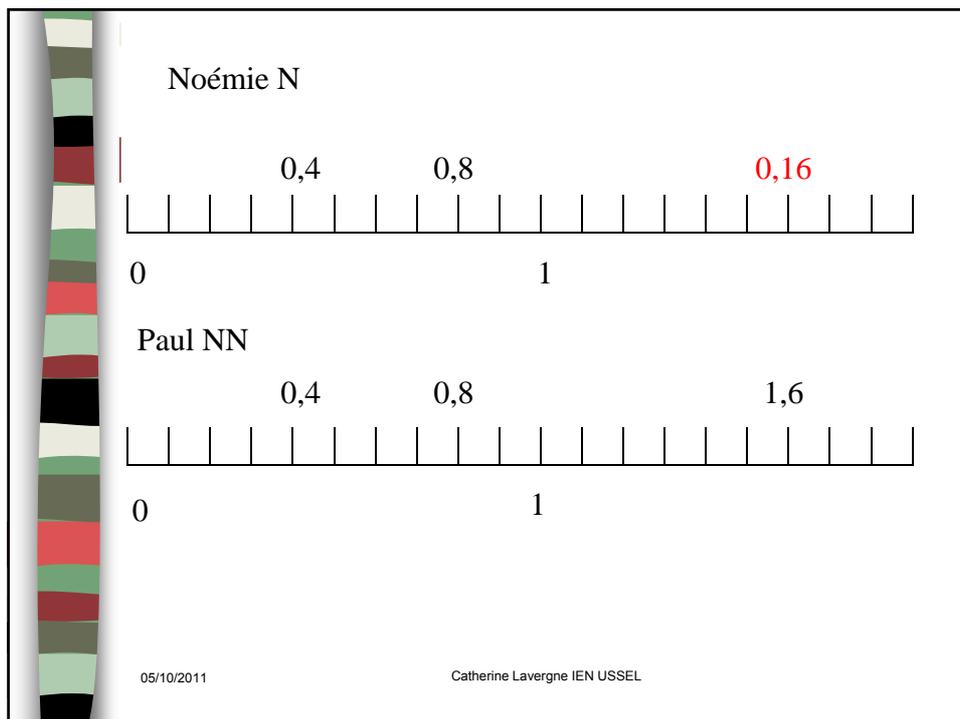
05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



8,32 + 15,87 / 15,672 + 352,21

Noémie N	Paul NN
$\begin{array}{r} 8,32 \\ + 15,87 \\ \hline 24,19 \text{ juste} \end{array}$ $\begin{array}{r} 15,672 \\ + 352,21 \\ \hline 508,93 \text{ faux} \end{array}$	$\begin{array}{r} 8,32 \\ + 15,87 \\ \hline 23,19 \text{ faux} \end{array}$ $\begin{array}{r} 15,672 \\ + 352,21 \\ \hline 367,693 \text{ faux} \end{array}$

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



<p><u>Ex3</u> Noémie Dans le nombre 134,678 le chiffre des dizaines est : 7</p> <p><u>Ex 4</u> Noémie Dans le nombre 754,61 le chiffre 1 est : unité</p>	<p><u>Ex3</u> Paul Dans le nombre 134,678 le chiffre des dizaines est : 3 ou 7</p> <p><u>Ex 4</u> Paul Dans le nombre 754,61 le chiffre 1 est : unité</p>
--	---

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



Ex 5

Range par ordre croissant : 3,407 ;
3,34 ; 3,43 ; 34,4

Noémie

$$3,34 < 3,43 < 34,4 < 3,407$$

Paul

$$3,\underline{3}4 < 3,\underline{4}3 < \underline{3},407 < \underline{3}4,4$$

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



Introduction avec mesures et
grandeurs

2m12cm ou 2,12m

- Si on introduit le décimal comme un codage de mesures de grandeurs qui permet de passer d'une mesure à deux unités à une unité, le décimal apparaît comme un couple d'entiers (CNN)

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



Introduction avec mesures et grandeurs

2,12m ou 212cm

- Le décimal apparaît comme une autre écriture d'un nombre entier. (CN)

05/10/2011

Catherine Lavergne IEN USSEL



Les difficultés pour les élèves concernant les décimaux

- Chaque nombre a un successeur (vrai pour les entiers, pour les décimaux une infinité).
- Entre deux entiers, il y a un nombre fini de naturels, alors qu'il y a une infinité de décimaux.
- La règle de comparaison n'est pas aussi simple (nombre de chiffres).

05/10/2011

Catherine Lavergne IEN USSEL



LES DÉCIMAUX DANS LES PROGRAMMES

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



Les nombres décimaux (programmes 2008)

- **Nombres décimaux** : désignations orales et écritures chiffrées, valeur des chiffres en fonction de leur position, passage de l'écriture à virgule à une écriture fractionnaire et inversement, comparaison et rangement, repérage sur une droite graduée ; la valeur approchée d'un décimal à l'unité près, au dixième près, au centième près.

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



Nombres décimaux

CM1

- Connaître la valeur de chacun des chiffres de **la partie décimale** en fonction de sa position (jusqu'au $1/100^e$), et pour de tels nombres : les **repérer**, les **placer** sur une droite graduée, les **comparer**, les **ranger**, les **encadrer** par deux nombres entiers consécutifs, **passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule** et réciproquement.

CM2

- Connaître la valeur de chacun des chiffres de **la partie décimale** en fonction de sa position (jusqu'au $1/10\ 000^e$) et pour de tels nombres : les **repérer**, les **placer** sur une droite graduée, les **comparer**, les **ranger**, **produire des décompositions** liées à une écriture à virgule, en utilisant 10 ; 100 ; 1 000... et 0,1 ; 0,001...
- Donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près.

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



Calcul

Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux.

Division d'un nombre décimal par un nombre entier.

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL

Nombres décimaux

CM1

Séance découverte: 13.45 à 15.16

Tableau de numération: 15.16 à 18.54 (complétude) de 18.45 à 20.06 (règle de fonctionnement)

Ecriture d'un décimal avec virgule: 20.06 à 24.00



05/10/2011

Catherine Lavergne IEN USSEL

Les décimaux

Le travail fait sur les fractions est destiné à donner du sens aux nombres décimaux dont l'écriture à virgule est présentée comme **une convention**.

les décimaux

partie entière				partie décimale			écriture fractionnaire	écriture décimale
milliards	millions	milliers	unités simples	dixièmes	centièmes	millièmes		
c d u	c d u	c d u	c d u					
			2 3	5	6	7	$23 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100} = 23 + \frac{56}{100}$	23,56
			1 2	4	6		$12 + \frac{4}{10} + \frac{6}{100} = 12 + \frac{46}{100}$	12,467
			1 4 5	7			$145 + \frac{7}{10}$	145,7

23,56 se lit vingt-trois **virgule** cinquante-six ou vingt-trois **unités** et cinquante-six **centièmes**

$$23,56 = 23 + \frac{56}{100} = 23 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100}$$

Sur les calculettes, 23,56 se tape 23.56

05/10/2011

Catherine Lavergne IEN USSEL

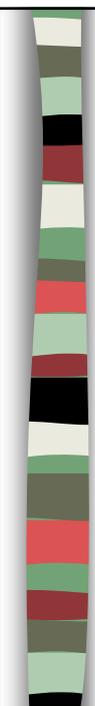


Pour établir une règle de comparaison

■ Voici des couples, ordonner et justifier

- 3,445 et 3,4432
- 2,375 et 2,47
- 2,375 et 2,3474
- 15,1 et 1,87
- 3 et 3,4
- 3,053 et 3,51
- 15,344 et 7,348
- 3,05 et 3,5
- 3,5 et 3,502
- 2,37 et 2,307
- 3,5 et 3,52

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL



Une règle de comparaison

- 15,1 et 1,87
- 2,375 et 2,47
- 3,053 et 3,51
- 3,05 et 3,5
- 2,375 et 2,3474
- 2,37 et 2,307
- 3,445 et 3,4432
- 15,344 et 7,348
- 3,5 et 3,52
- 3,5 et 3,502
- 3 et 3,4

05/10/2011 Catherine Lavergne IEN USSEL

Comparaison, Encadrement et Intercalation.

Pour comparer puis ranger des nombres décimaux

Premier cas

Les parties entières sont différentes, le plus petit sera celui dont la partie entière est la plus petite.
(On ne s'occupe pas de la partie décimale.)

$$9,84 < 10,16 \text{ car } 9 < 10$$

Deuxième cas

Les parties entières sont égales.
On compare les parties décimales.

Le nombre le plus petit sera celui dont le chiffre des dixièmes est le plus petit.

$$10,16 < 10,45 \text{ car } 1 < 4$$

$$10,08 < 10,16 \text{ car } 0 < 1$$

Si les chiffres des dixièmes sont égaux, on compare les chiffres des centièmes.

Le nombre le plus petit sera celui dont le chiffre des centièmes est le plus petit.

$$10,41 < 10,45 \text{ car } 1 < 5$$

Si les chiffres des centièmes sont égaux, on compare les chiffres des millièmes et ainsi de suite.

Cas particuliers

Pour comparer un nombre entier et un décimal ou deux décimaux qui n'ont pas le même nombre de chiffres à la partie décimale, on peut au besoin ajouter des zéros « inutiles » et employer la même démarche.

$$10 < 10,08 \quad 10,00 < 10,08$$

$$10,45 < 11 \quad 10,45 < 11,00$$

$$10,4 < 10,45 \quad 10,40 < 10,45$$

05/10/2011

Catherine Lavergne IEN USSEL