Proportionnalité

Stage T2

OLIVIER BARRAUD, CPC USSEL HC

CORINNE FALGUIERES, CPC BRIVE URBAIN

Plan de l'intervention

1. Mise en situation : définir et caractériser une situation de proportionnalité ;
2. Point sur les programmes ;
3. Travail en atelier : les variables didactiques et les procédures de résolution ;
4. Vers une programmation de cycle ;
5. Proportionnalité et transdisciplinarité ;
6. Conclusion

1- Tri de situations

Situation proportionnelle	Situation non proportionnelle
2 – 4 – 6 – 9 – 10 – 11 – 13 – 15 – 16 – 18 – 19	1 – 3 – 5 – 7 – 8 – 12 – 14 – 17 – 20

1- Définition de la proportionnalité

En mathématiques, on dit que deux séries de nombres sont **proportionnelles** quand on peut passer de l’une à l’autre en multipliant (ou divisant) la première par une même constante non nulle. Ce *facteur* constant est appelé **coefficient de proportionnalité**.

2 –Point sur les programmes

« Le cycle 3 vise à approfondir des notions mathématiques abordées au cycle 2, à en étendre le domaine d'étude, à consolider l'automatisation des techniques écrites de calcul introduites précédemment (addition, soustraction et multiplication) ainsi que les résultats et procédures de calcul mental du cycle 2, mais aussi à construire de nouvelles techniques de calcul écrites (division) et mentales, enfin à introduire des notions nouvelles comme les nombres décimaux, la proportionnalité ou l'étude de nouvelles grandeurs (aire, volume, angle notamment) ».

Propos introductifs programmes Cycle 3 (Mathématiques)

« MODELISER
Reconnaitre et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité. »

2 –Point sur les programmes

NOMBRES ET CALCULS

Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul.

Proportionnalité : Reconnaitre et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée. propriétés de linéarité (additive et multiplicative), passage à l’unité, coefficient de proportionnalité.

Appliquer un pourcentage.

2 –Point sur les programmes

GRANDEURS ET MESURES

Dans le cadre des grandeurs, la proportionnalité sera mise en évidence et convoquée pour résoudre des problèmes dans différents contextes.

Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres entiers et des nombres décimaux

Proportionnalité : Identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs à partir du sens de la situation. Résoudre un problème de proportionnalité impliquant des grandeurs.

2 –Point sur les programmes

ESPACE ET GEOMETRIE

Les activités spatiales et géométriques sont à mettre en lien avec les deux autres thèmes : résoudre dans un autre cadre des problèmes relevant de la Proportionnalité ; utiliser en situation les grandeurs (géométriques).

Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques
Proportionnalité : Reproduire une figure en respectant une échelle donnée.
Agrandissement ou réduction de figure

2 –Point sur les programmes

REPERES DE PROGRESSIVITE – Résolution de problèmes

Problèmes relevant de la proportionnalité		
Le recours aux propriétés de linéarité (multiplicative et additive) est privilégié. Ces propriétés doivent être explicitées ; elles peuvent être institutionnalisées de façon non formelle à l'aide d'exemples verbalisés (« Si j'ai deux fois, trois fois… plus d'invités, il me faudra deux fois, trois fois… plus d'ingrédients » ; « Je dispose de briques de masses identiques. Si je connais la masse de 7 briques et celle de 3 briques alors je peux connaître la masse de 10 briques en faisant la somme des deux masses »). Dès la **période 1**, des situations de proportionnalité peuvent être proposées (recettes…). L'institutionnalisation des propriétés se fait progressivement à partir de la **période 2**.	Dès la **période 1**, le passage par l'unité vient enrichir la palette des procédures utilisées lorsque cela s'avère pertinent. À partir de la **période 3**, le symbole % est introduit dans des cas simples, en lien avec les fractions d'une quantité (50 % pour la moitié ; 25 % pour le quart ; 75 % pour les trois quarts ; 10 % pour le dixième).	Tout au long de l'**année**, les procédures déjà étudiées en CM sont remobilisées et enrichies par l'utilisation explicite du coefficient de proportionnalité lorsque cela s'avère pertinent. Dès la **période 2**, en relation avec le travail effectué en CM, les élèves appliquent un pourcentage simple (en relation avec les fractions simples de quantité : 10 %, 25 %, 50 %, 75 %). Dès la **période 3**, ils apprennent à appliquer un pourcentage dans des registres variés.

2 –Point sur les programmes

REPERES DE PROGRESSIVITE – Grandeurs et mesures

Proportionnalité		
Les élèves commencent à identifier et à résoudre des problèmes de proportionnalité portant sur des grandeurs.	Des situations très simples impliquant des échelles et des vitesses constantes peuvent être rencontrées.	Sur des situations très simples en relation avec l'utilisation d'un rapporteur, les élèves construisent des représentations de données sous la forme de diagrammes circulaires ou semi-circulaires.

2 –Point sur les programmes

REPERES DE PROGRESSIVITE – Espace et géométrie

La proportionnalité		
	Les élèves agrandissent ou réduisent une figure dans un rapport simple donné (par exemple $\times \frac{1}{2}$, $\times 2$, $\times 3$).	Les élèves agrandissent ou réduisent une figure dans un rapport plus complexe qu'au CM2 (par exemple $\frac{3}{2}$ ou $\frac{3}{4}$) ; ils reproduisent une figure à une échelle donnée et complètent un agrandissement ou une réduction d'une figure donnée à partir de la connaissance d'une des mesures agrandie ou réduite.

3- Travail en ateliers

- Procédures de résolution de la proportionnalité en Cycle 3

- Les variables didactiques utilisables

3- Travail en ateliers

PROCEDURES

Procédure prenant appui sur le principe de linéarité

Il existe un lien facilement identifiable (multiplicatif) entre les nombres des deux colonnes.

1 cube mesure 8 cm de hauteur. Combien mesurera une tour construite avec 6 cubes ?

La manipulation (et ou la schématisation) est aisément réalisable.

« Ma tour va être 6 fois plus grande qu'un cube ».

×6

Nombre de cubes	1	6
Hauteur (cm)	8	?

×6

3- Travail en ateliers

PROCEDURES

Procédure prenant appui sur le principe de linéarité

En 6 heures, une installation de chauffage consomme 21 litres de fioul. Combien de litres consommera-t-elle en 8 heures ?

: 2

Temps (heures)	6	2	6 + 2 = 8
Consommation (litres)	21	7	21 + 7 = 28

: 2

3- Travail en ateliers

PROCEDURES

Procédure prenant appui sur l’utilisation du coefficient

Cette procédure résulte d’un raisonnement qui est « moins naturel » surtout lorsque les deux grandeurs ne sont pas de même nature et exprimées dans la même unité.

Une tour composée de 4 cubes mesure 12 cm de hauteur. Combien mesurera une tour construite avec 9 cubes ?

La manipulation (et ou la schématisation) est aisément réalisable.

Nombre de cubes	4	6
Hauteur (cm)	12	?

× 3

3- Travail en ateliers

PROCEDURES

Procédure prenant appui sur le passage à l'unité

Cette procédure réduite au simple procédé technique est la célèbre « règle de 3 ».

En 9h, une installation de chauffage consomme 36 litres de fioul. Combien de litres consommera-t-elle en 108 heures ?

: 9 × 108

Temps (heures)	9	1	108
Consommation (litres)	36	4	?

: 9 × 108

Il est donc très important de proposer des exercices de calcul mental du style : **6 => (pour aller à) 14** avec le nombre minimum de multiplications ou de divisions …

« 6 : 3 x 7 = 14 »

D'autres exemples :

4 => 10

8 => 12

9 => 15

Ce genre d'exercice permet d'acquérir une souplesse mentale qui permet d'utiliser notamment les propriétés de linéarité que l'on convoque au CM1.

Importance de contextualiser pour mettre du sens sur la notion de proportionnalité notamment dans les activités « découverte » :

Recette du sirop :

6 cl de sirop 40 cl d'eau => 15 cl de sirop combien de cl d'eau (CM1)

7 cl de sirop 50 cl d'eau => 17 cl de sirop combien de cl d'eau (CM2 – 6ème)

(calcul approché du coefficient de proportionnalité)

Faire l'expérience devant les enfants et tester les solutions qui sont proposées :

Les résultats sont vérifiables à l'œil et au goût !!!

Situation 3 : mesures

<u>Menthe à l'eau :</u>
Verser 6 cL de sirop dans un verre.
Ajouter 40 cL d'eau.

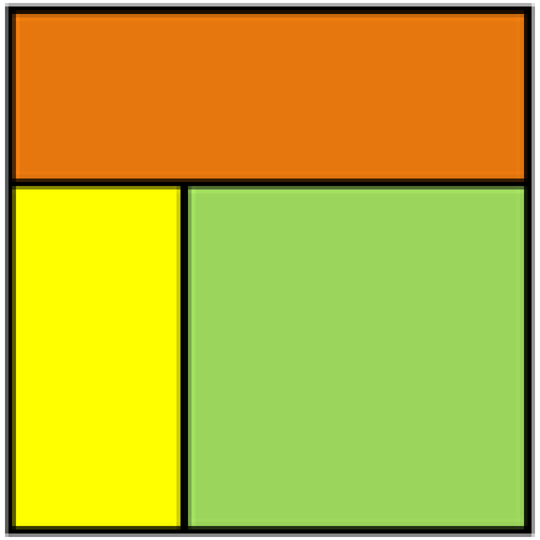
- Quelle quantité d'eau faut-il pour 15 cL de sirop ?
- Quelle quantité de sirop faut-il pour 1L d'eau ?

Situation 1 : géométrie

Énoncé

Présenter l'activité en parlant d'agrandir la figure. Ne pas parler de proportionnalité à ce stade.

> Agrandis les 3 pièces de la figure de façon à ce que les segments mesurant 2 cm mesurent finalement 6 cm.



3- Travail en ateliers

VARIABLES

Situation de référence

Une installation de chauffage consomme 10 litres de fioul en 2 heures. Combien de litres de fioul consommera-t-elle en 8 heures ?

variable, pouvant être modifiée par l'enseignant, et dont les modifications (même légères) peuvent infléchir sensiblement le comportement des élèves et provoquer des procédures ou des types de réponses différentes

3- Travail en ateliers

VARIABLES

L'habillage

Sous forme de texte

	Une installation de chauffage consomme 10 litres de fioul en 2 heures. Combien de litres de fioul consommera-t-elle en 8 heures ?

3- Travail en ateliers

VARIABLES

L'habillage

Sous forme de tableau

Temps (heures)	2	8
Consommation (litres)	10	?

Observe le tableau qui donne le nombre de litres de fioul que consomme une installation de chauffage en fonction du nombre d'heures de fonctionnement. Combien de litres de fioul cette installation consommera-t-elle en 8 heures ?

3- Travail en ateliers

VARIABLES

L'habillage

Sous forme de tableau

Temps (heures)	2	8
Consommation (litres)	10	?

Observe le tableau qui donne le nombre de litres de fioul que consomme une installation de chauffage en fonction du nombre d'heures de fonctionnement. Combien de litres de fioul cette installation consommera-t-elle en 8 heures ?

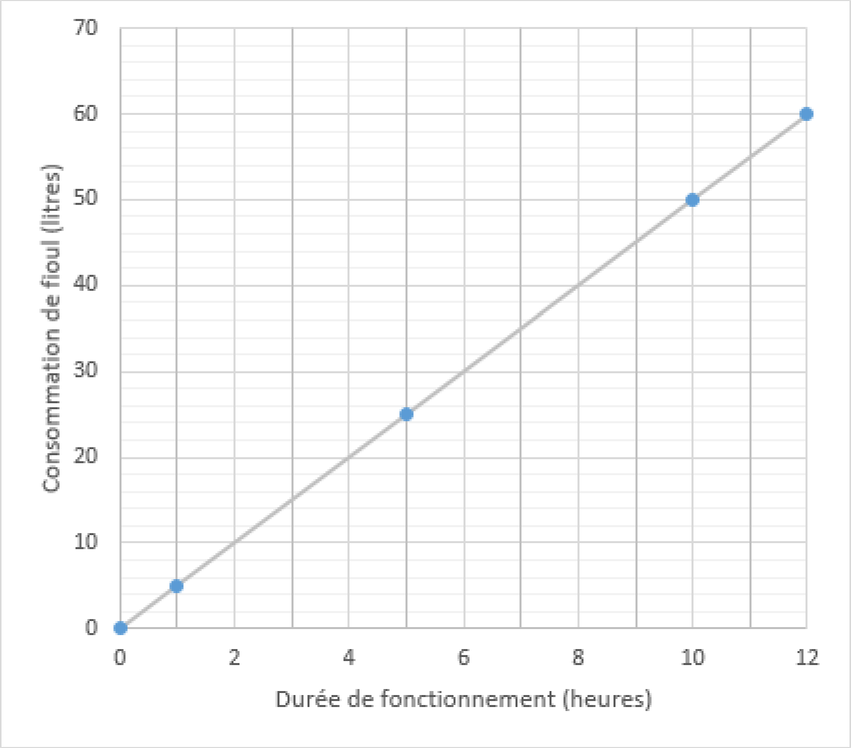
3- Travail en ateliers

VARIABLES

L'habillage

Sous forme de graphique

Observe le graphique qui montre le nombre de litres de fioul que consomme une installation de chauffage en fonction du nombre d'heures de fonctionnement. Combien de litres de fioul cette installation consommera-t-elle en 8 heures ?



3- Travail en ateliers

VARIABLES

L'habillage

Sous forme de dessin

Combien de litres de fioul cette installation consommera-t-elle en 8 heures ?

3- Travail en ateliers

VARIABLES

La nature des nombres en jeu

	Une installation de chauffage consomme 7,5 litres de fioul en 2h30. Combien de litres de fioul consommera-t-elle en 12 heures ?

	Une installation de chauffage consomme 4 litres de fioul en ¾ d'heure. Combien de litres de fioul consommera-t-elle en 8,5 heures ?

3- Travail en ateliers

VARIABLES

Les relations entre les nombres

Le fait de jouer sur les relations entre les nombres peut permettre de favoriser une procédure.

	Une installation de chauffage consomme 10 litres de fioul en 2 heures. Combien de litres de fioul consommera-t-elle en 3 heures ?
	Une installation de chauffage consomme 10 litres de fioul en 3 heures. Combien de litres de fioul consommera-t-elle en 12 heures ?

3- Travail en ateliers

VARIABLES

Les unités de mesure

	Une installation de chauffage consomme 10 litres de fioul en 2 heures. Combien de litres de fioul consommera-t-elle en 150 minutes ?

3- Travail en ateliers

VARIABLES

Le contexte

	En trayant ses vaches, un éleveur obtient 10 litres de lait en 2 heures. Combien de litres de de lait obtiendra-t-il en 8 heures ?

4- Eléments pour une programmation

			Cycle 2	Cycle 3		
				CM1	CM2	6ème
Procédures de résolution	linéarité	linéarité simple (multiplication)	■	■	■	■
		linéarité simple (division)	Cas très simples (moitié)	Cas simples	■	■
		linéarité simple (soustraction de colonnes)		Cas simples (manipulation ou schématisation)	Cas simples (manipulation ou schématisation)	■
		linéarité simple (addition de colonnes)				■
		linéarité combinée			■	■
	coefficient de proport.	à partir de situations permettant la manipulation	■	■	■	■
		abstraites		Cas simples	■	■
	Passage à l'unité	Passage par l'unité	Cas simples de manip.	■	■	■
		« Règle de trois »				Abordée non exigée
Variables	Habillage	Texte	■	■	■	■
		Tableau	■	■	■	■
		Graphique		■	■	■
		Schéma	Cas simples	■	■	■
	Nombres utilisés	Entiers	■	■	■	■
		Fractions		Cas simples	■	■
		Décimaux			■	■

4- Proportionnalité et interdisciplinarité

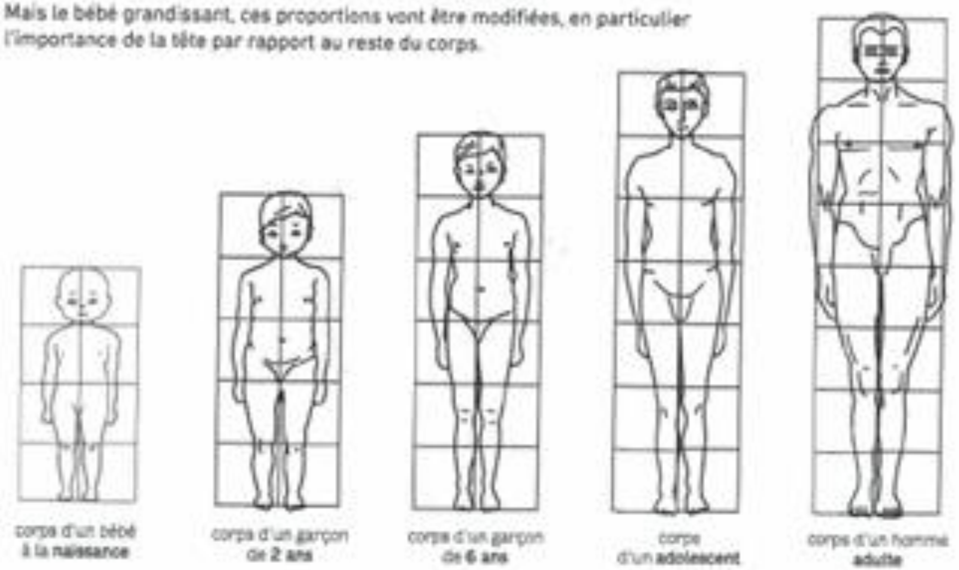
- en sciences

DOCUMENT

Tu as peut-être déjà remarqué qu'un bébé, à sa naissance, a une grosse tête par rapport à son corps, un cou tout petit et des jambes très courtes.

Les proportions de son corps sont alors à peu près celles-ci :
un quart pour la tête et le cou, un quart pour le torse, un quart pour le ventre et les cuisses, et un dernier quart pour le reste des jambes.

Mais le bébé grandissant, ces proportions vont être modifiées, en particulier l'importance de la tête par rapport au reste du corps.



QUESTION

Combien de fois la hauteur de la tête est-elle contenue dans la taille totale :

a. d'un bébé à sa naissance ? ……
b. d'un enfant de 2 ans ? ……
c. d'un enfant de 6 ans ? ……
d. d'un adolescent ? ……

DOCUMENT

Les chouettes sont malaimées, peut-être à cause de leur cri lugubre dans la nuit. Pourtant ce sont des animaux utiles qui nous débarrassent de petits animaux trop gourmands.

En effet, une chouette mange chaque année environ 1 500 petits rongeurs (rats des moissons, mulots, campagnols…), qui mangent eux-mêmes environ l'équivalent de leur propre poids en grains de blé tous les trois jours ! Et toutes ces petites bêtes pèsent en moyenne 15 g chacune.

La chouette mange aussi 350 insectivores (musaraignes, taupes…) chaque année, quelques grenouilles et des oiseaux.

QUESTION

Quelle quantité de blé une chouette permet-elle de sauver chaque année ?

4- Proportionnalité et interdisciplinarité

- en géographie

C **Iceberg**

Un **iceberg** est un bloc de glace d'eau douce de la calotte glaciaire qui s'est détaché du continent et qui dérive sur la mer. Ce bloc est souvent de masse considérable.

Le terme *iceberg* vient de l'anglais et signifie littéralement « montagne [berg] de glace [ice] ».

Les $\frac{9}{10}$ du volume d'un iceberg sont situés sous la surface de l'eau. Il est donc difficile de connaitre sa forme exacte car elle n'est pas vraiment visible. Cette glace (composée d'eau douce gelée) flotte comme un énorme glaçon dans un verre d'eau et dérive, tout en fondant peu à peu dans des eaux plus chaudes... Souvent, l'iceberg se fragmente ou se retourne.

Parties émergée et immergée d'un iceberg

QUESTIONS

1 Quelle partie (fraction) d'un iceberg est visible puisqu'elle est émergée ? ....

2 Quelle partie (pourcentage) d'un iceberg n'est pas visible puisqu'elle se trouve sous le niveau de la mer ? ....

3 Imagine un grand iceberg de forme plate, dont la hauteur de la partie émergée varie entre 35 et 40 m. Jusqu'à quelle profondeur approximative sous le niveau de la mer la partie immergée peut-elle descendre ? ....

4 Selon toi, combien de fois un inlandsis peut-il être « plus épais » que la banquise persistante ? ....

4- Proportionnalité et interdisciplinarité

- en histoire

La **Préhistoire** est généralement définie comme la période comprise entre l'apparition de l'Humanité (premiers hommes) et l'apparition des premiers documents écrits (environ 3500 avant J.-C.).

QUESTIONS

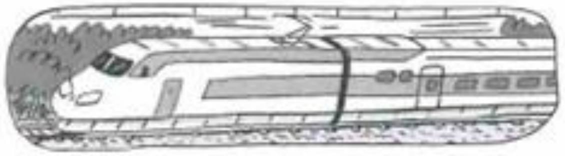
1 Imagine un rouleau de papier. Si un siècle (100 ans) correspond à 1 cm, combien mesure la bande de papier qui représente le temps des hommes préhistoriques ?
Réponds pour chacun des cas suivants :

a. Si l'on considère, comme certains paléoanthropologues, et jusqu'à preuve du contraire, que la plus ancienne lignée humaine est le **Sahelanthropus Tchadensis** (comme *Toumaï* dont le crâne a été trouvé au Tchad en 2001), qui date d'environ **7 millions d'années**. ....

b. Si l'on considère que les premiers hommes sont les **Australopithèques** (comme *Lucy*), apparus il y a environ **4 millions d'années**. ....

c. Si l'on considère que les premiers hommes sont du genre **Homo** (Homo habilis, Homo erectus, Homo sapiens...), apparus il y a environ **3 millions d'années**. ....

Au temps de Louis XIV, on voyageait en **voiture à cheval**. Pour aller de Paris à Lyon (460 km), le voyage en **diligence** durait cinq jours en été et six jours en hiver. En fait, la diligence ne roulait en été qu'environ 8 heures par jour et en hiver entre 6 et 7 heures par jour.



Aujourd'hui, avec le **TGV (Train à Grande Vitesse)**, le trajet ne dure plus que 2 heures. Quel progrès !

QUESTIONS

1 À quelle vitesse moyenne horaire (nombre moyen de km parcourus en 1 heure) faisait-on ce trajet en été à l'époque de Louis XIV ? ....

2 Quelle est la vitesse moyenne horaire du TGV pour ce parcours aujourd'hui ? ....

4- Proportionnalité et interdisciplinarité

- en EMC

DOCUMENT

Fumer est dangereux pour la santé. La loi oblige même les fabricants de cigarette à l'écrire sur chaque paquet. Pour frapper les esprits, des études ont montré qu'une cigarette fait perdre environ $\frac{1}{4}$ d'heure de vie. Heureusement, ceci est une moyenne et cela ne se passe pas ainsi pour chaque fumeur.

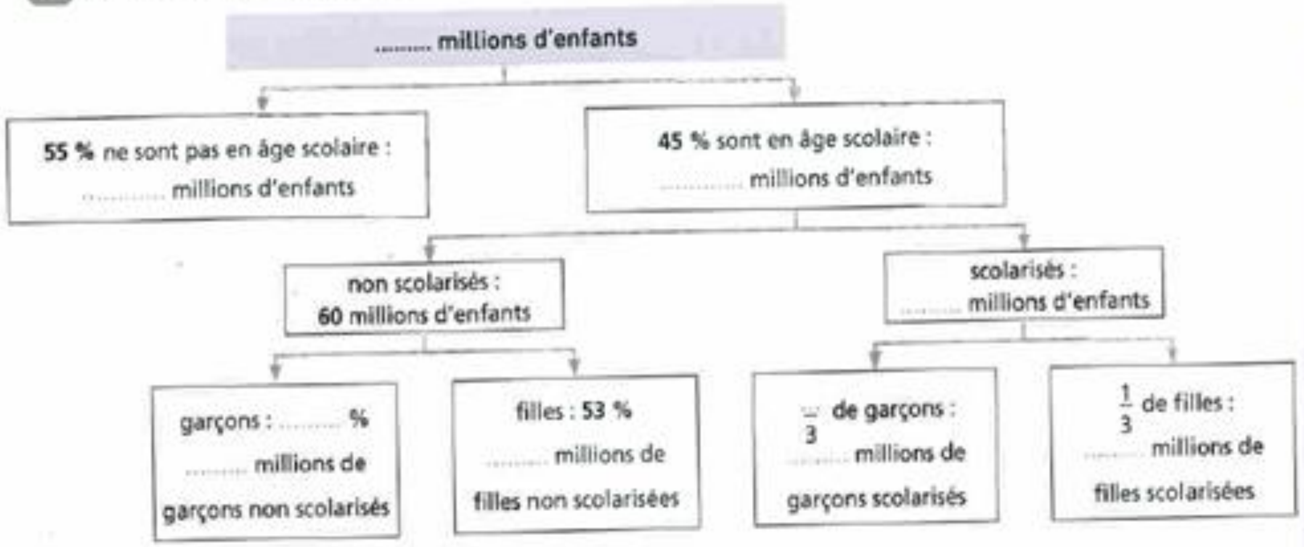
Impressionné par ces calculs, mon père a enfin décidé d'arrêter de fumer. Cela va, en plus, lui faire faire des économies car il fumait un paquet et demi par jour ! Ses cigarettes préférées coutaient 7 € le paquet.

QUESTIONS

1 Utilise ces résultats pour estimer la perte d'espérance de vie d'un fumeur d'un paquet de 20 cigarettes par jour pendant 15 ans ? ....
et pendant 30 ans ? ....

2 Calcule quelle sera l'économie réalisée par le père en 1 mois de 30 jours, et en 1 an. ....

C Il y a environ 2,2 milliards d'enfants dans le monde.



6- Conclusion

- Travailler la proportionnalité tout au long de la scolarité en contextualisant
- Oraliser et faire oraliser les procédures
- Enseigner les techniques multiplicatives en calcul mental
- Choisir les situations en fonction des variables et des procédures devant être mises en place